

# الاقتصاد القياسي

بين النظرية والتطبيق

دكتور / محمد محمود عطوة

قسم الاقتصاد - كلية التجارة  
جامعة المنصورة

طبعة طائف

المكتبة العصرية - المنصورة

٢٠٠٢-٥١٤٢٣



# الإقتصاد القياسي

## بين النظرية والتطبيق

مكتور

محمد محمد عطوة يوسف

قسم الإقتصاد

كلية التجارة - جامعة المنصورة

المكتبة العصرية - المنصورة

1423 هـ - 2002



• الإقتصاد القياسى  
بين النظرية والتطبيق

- الطبعة الأولى 2002
- حقوق الطبع والنشر محفوظة للمؤلف
- الإعداد الفنى والكتابة والنشر  
المكتبة المصرية 050 / 2221875
- رقم الإيداع بدار الكتب المصرية  
2001/ 18649
- رقم الإيداع الدولى I. S. B. N.  
977-6033-34-2

تحذير

لا يجوز نشر أو إقتباس أى جزء من هذا الكتاب بأى  
شكل من الأشكال أو وسيلة من الوسائل سواء المكتوبة المرئية  
أو المسموعة إلا بإذن رسمى مكتوب من المؤلف.

المؤلف



بِسْمِ اللَّهِ الرَّحْمَنِ الرَّحِيمِ



## خواتر كاتب

اكتب بإيـدك حلمك  
ووعى جد فى يوم يحلمك  
فاكر لحظات القوة فى عمرك  
زى الظل بجانبك حلمك  
واقع يتحقق فى بساطة فكرك







## مقدمه الطبعة الأولى

يناقش هذا الكتاب أحد الاتجاهات الحديثة فى علم الإقتصاد، وهو ما يطلق عليه الإقتصاد القياسى، والذي يفسر الظواهر الإقتصادية من خلال قياس العلاقة بين متغيراتها باستخدام النماذج الإحصائية. وقد بدأت فكرة هذا الكتاب منذ ثلاث سنوات عندما قمت بتدريس مادة الإقتصاد القياسى للفرقة الرابعة شعبة الإقتصاد والإحصاء بكلية التجارة - جامعة المنصورة، وكان فى البداية عبارة عن مجموعة محاضرات قمت بإلقائها على طلابى بالإضافة إلى مناقشتهم داخل قاعات التدريس، وقد تم تطويرها لتخرج بنظرية متكاملة عن الإقتصاد القياسى، مع إعطاء تطبيقات عملية للمشكلات التى تواجه أى باحث فى هذا المجال، بما يستفيد به الباحثين فى مراحل الدراسات العليا. إضافة إلى الأسلوب السهل الذى عرض به الكتاب. ولاشك أن أى جهد إنسانى لا يمكن أن يتسم بالكامل (الذى اختص الله به نفسه دون سائر كائناته)، لذلك هناك بعض النقص والذي سوف يستكمل فى الطبقات القادمة إنشاء الله.

ويرجو الكاتب من الله أن يوفقه إلى ذلك.

مع خالص تمنياتى بالتوفيق،،،

دكتور / محمد محمود عطوة

المنصورة فى يناير 2002



## المحتويات

الصفحة	الموضوع
	<b>الفصل الأول:</b>
12-38	توصيف الاقتصاد القياسي
15	1/ 1- تعريف الاقتصاد القياسي
22	1/ 2- ثلاث أهداف لنظرية الاقتصاد القياسي
23	1/ 3- فروع الاقتصاد القياسي
24	1/ 4- منهجية البحث في الاقتصاد القياسي
	<b>الفصل الثاني:</b>
39-58	النماذج الاقتصادية
41	2/ 1- تعريف النموذج الإقتصادي
43	2/ 2- متغيرات النموذج الإقتصادي
48	2/ 3- معادلات النموذج
54	2/ 4- أنواع النماذج الاقتصادية وفقا للمتغيرات التي تحتويها
	<b>الفصل الثالث:</b>
59-117	نموذج الإنحدار الخطي البسيط
61	3/ 1- صياغة نموذج خطي لمتغيرين
65	3/ 2- طريقة التقدير الإحصائي
91	3/ 3- الاختبارات الإحصائية لتقديرات المربعات الصغرى
101	3/ 4- قياس القدرة التفسيرية للنموذج
106	3/ 5- اختبار معنوية العلاقة الخطية للإنحدار
108	3/ 6- ملاحظات على أهمية الاختبارات الإحصائية لمعاملات النموذج
110	3/ 7- حالة عملية

## تابع المحتويات

الصفحة	الموضوع
	الفصل الرابع:
119-146	نموذج الإنحدار الخطى المتعدد
121	1/ 4 - صياغة النموذج الخطى العام
126	2/ 4 - طريقة التقدير الإحصائى وخصائصها
136	3/ 4 - الاختبارات الإحصائية
	الفصل الخامس
147-215	مشاكل النماذج القياسية، الكشف، الأثران العلاج
150	1/ 5 - عدم ثبات تباين الخطأ العشوائى Heteroscedasticity
170	2/ 5 - الارتباط الذاتى Auto Correlation
190	3/ 5 - الارتباط بين المتغير المستقل والخطأ العشوائى
202	4/ 5 - عدم الخطية
210	5/ 5 - تنقية النموذج
217	مراجع الكتاب

## الفصل الأول:

### توصيف الإقتصاد القياسى



يتكون هذا الفصل من أربع أجزاء، حيث يتضمن الجزء الأول اد القياسى وعلاقته بالإحصاء والرياضة والنظرية الإقتصادية، ويتضمن الجزء الثانى تحديد لأهداف نظرية الإقتصاد القياسى من حيث التحليل ووضع السياسات، والتنبؤ. أما الجزء الثالث فيدرس فروع علم الإقتصاد القياسى، ونختتم هذا الفصل بالجزء الرابع الذى يتناول فيه الكاتب منهجية البحث فى نظرية الإقتصاد القياسى.

### 1/1- تعريف الإقتصاد القياسى

كتب الإحصائى النرويجى رنجر فريتش Ranger Frisch - افتتاحية مجلة الإقتصاد القياسى عدد (1930) - مقالة يحدد فيها طبيعة الإقتصاد القياسى ومجاله. حيث ذكر أن الإقتصاد القياسى ليس هو الإحصاء القياسى، وهو أيضا لا يعنى النظرية الإقتصادية، كما يجب إلا ينظر إليه على أنه مرادف للإقتصاد الرياضى أو التطبيقات الرياضية فى الإقتصاد. فقد أظهرت التجربة أن كلا من هذه العلوم الثلاثة ضرورى - ولكن أيا منها لا يكون كافيا بمفرده- للفهم الحقيقى للعلاقات الكمية فى الإقتصاد.

وقد عرف ثلاثة من كبار الفكر القياسى - سامولسون Samuelson ، وكوبمانس Koopmans، وستون Stone الإقتصاد القياسى بأنه فرع من فروع علم الإقتصاد يستخدم التحليل الكمى للظواهر الإقتصادية، المبنى على أساس التماسك بين النظرية والملاحظات متخذاً فى ذلك أساليب استدلال ملائمة.

وعرف الإقتصادى أوسكار لانكه Oskar Lange الإقتصاد القياسى بأنه العلم الذى يستعين بالطرق الاحصائية لتحديد فعل القوانين الإقتصادية الموضوعية تحديدا كميا فى العالم الإقتصادى الواقعى.



نستطيع من التعريفات السابقة أن نحدد مفهوم وطبيعة ومجال الإقتصاد القياسى كما يلى:

1- ينظر إلى الإقتصاد القياسى، باعتباره أحد الفروع الحديثة لعلم الإقتصاد الذى يهتم بالتحليل الكمى للظواهر الإقتصادية، أو باختصار قياس العلاقات الاقتصادية. وهذه هى الترجمة المباشرة لكلمة **Econometrics**.

2- يعتبر الإقتصاد القياسى نوع خاص من التحليل الإقتصادى الذى تمتزج فيه النظرية الإقتصادية بعد صياغتها صياغة رياضية مع القياس العملى للظواهر الإقتصادية عن طريق الأساليب الإحصائية.

ورغم تعدد تعريفات علم الإقتصاد القياسى، إلا أن جميعها تتفق على أن الإقتصاد القياسى هو العلم الذى يجمع بين النظرية الإقتصادية والرياضية والإحصاء، بهدف الحصول على القيم العددية لمعالم العلاقات الإقتصادية (مثل المرونة، والقيم الحدية) واختبار النظريات الإقتصادية والتحقق منها فى العالم الواقعى. معنى هذا أن الإقتصاد القياسى يهتم بصياغة وتقدير واختبار وتحليل النماذج الإقتصادية مستخدماً فى ذلك النظرية الإقتصادية والطرق الرياضية والإحصائية.

هذا وتشير التعريفات السابقة إلى أن الإقتصاد القياسى مزيج من النظرية الإقتصادية والرياضية والإحصائية، ورغم ذلك لا يمكن أن ننكر أن الإقتصاد القياسى له خصائصه الفريدة والتى تميزه عن غيره من العلوم الأخرى. ومن أهم الخصائص التى يتميز بها الإقتصاد القياسى عن الإقتصاد الرياضى هى إدخال ما يعرف باسم المتغير العشوائى فى النماذج القياسية. وهذا المتغير تتجاهله النظرية الإقتصادية و الإقتصاد الرياضى على حد سواء. ويمكن توضيح ذلك من خلال المثالين التاليين:-

## المثال الأول:

تفترض النظرية الإقتصادية أن الطلب على سلعة ما - مع فرض ثبات أذواق المستهلكين خلال فترة الدراسة - يعتمد على سعرها وأسعار السلع البديلة والمكملة ودخل المستهلك. هذه العلاقة تتضمن أن الطلب على السلعة يتحدد كلية عن طريق هذه المتغيرات الثلاثة، وليست هناك عوامل أو متغيرات أخرى - غير ما ذكر - يكون له تأثير على الطلب. ويقوم الإقتصاد الرياضى بالتعبير عن العلاقة السابقة فى شكل رياضى سواء فى شكل ضمنى أو صريح كما يلى:

$$\left. \begin{aligned} Q &= F(P, P_1, P_2, P_3, \dots, P_n, Y) \\ &\text{أو} \\ Q_d &= \alpha + \beta p + \beta_1 p_1 + \beta_2 p_2 \dots + \beta_n p_n + B_y \cdot y \end{aligned} \right\} (1-1)$$

حيث أن:

Q الطلب من السلعة.

Q<sup>d</sup> الكمية المطلوبة من السلعة.

P سعر الوحدة من السلعة

Y<sub>n</sub> دخل المستهلك

P<sub>1</sub>, p<sub>2</sub>, .....p<sub>n</sub> أسعار السلع الأخرى (البديلة والمكملة)

α ، β<sub>1</sub> ، β<sub>2</sub> .....β<sub>n</sub> ، β<sub>y</sub> معاملات دالة الطلب.

وفيه من معادلة الطلب السابقة، أن الكمية المطلوبة من السلعة يمكن أن تتغير فقط بتغير المتغيرات التى تظهر فى الجانب الأيمن من المعادلة رقم (1-1). وأنه لا يوجد أى متغير أو عامل آخر - غير المتغيرات السابقة - تؤثر

على انكمية المطلوبة. ومعنى هذا أن كلا من النظرية الإقتصادية والإقتصاد الرياضى يفترضان وجود علاقة كاملة (ودقيقة) بين المتغيرات الإقتصادية. هذه الصياغة الكاملة (الدقيقة) للعلاقات الإقتصادية لا تصلح لأغراض القياس والاحتجاز الإحصائى، فضلا عن تجاهلها لعدد هام من الاعتبارات العملية، حيث ان:-

1- لا يمكن التسليم بأن سعر السلعة وأسعار السلع الأخرى (البديلة أو المكملة) ودخل المستهلك هى العوامل الوحيدة المحددة للكمية المطلوبة من السلعة. ورغم أنها أهم المتغيرات التى تؤثر عليها (الكمية المطلوبة)، لكن هناك متغيرات أخرى ... مثل الأذواق والميول والرغبات، حجم العائلة "عدد السكان" والعادات الشرائية... الخ- لها تأثيرها على الكمية المطلوبة قد أهملت فى العلاقة السابقة (1-1).

2- قد يرجع الاختلاف فى مستويات الكمية المطلوبة - بالرغم من ثبات الأسعار والدخل - إلى وجود عنصر (متغير) عشوائى فى السلوك الإقتصادى للإنسان، والذى قد يؤثر فيه الإشاعات والميول والعادات والعوامل النفسية.... الخ.

3- إذا فرضنا أن العلاقة الإقتصادية النظرية كاملة (دقيقة)، لا يمكن افتراض ذلك للعلاقة التى نحاول الحصول عليها من البيانات المتاحة، والتى غالبا ما تحتوى على أخطاء ناتجة عن عدم دقة الملاحظة أو القياس.

4- لا تقدم النظرية الإقتصادية معلومات دقيقة عن شكل العلاقة الرياضية، خطية أو غير خطية.

5- قد يقوم الباحث بتقدير العلاقة الإقتصادية باستخدام معادلة واحدة لتفسير ظاهرة معينة، فى حين أننا نحتاج إلى مجموعة معادلات أنية لتقدير وتفسير العلاقة السابقة.

هذا ويأتى دور الاقتصاد القياسى الذى يأخذ فى الاعتبار كل العوامل السابقة، والتي تجعل من غير الممكن افتراض وجود علاقة كاملة فى المجال الإقتصادى، وذلك بإدخال أو إضافة متغير عشوائى فى العلاقة المراد قياسها. وبذلك تكون دالة الطلب فى صيغتها العشوائية (القياسية) كما يلى:-

$$\left. \begin{aligned} Q &= F(P, P_1, P_2, P_3, \dots, P_n, Y) + \mu \\ Q^d &= \alpha + \beta p + \beta_1 p_1 + \beta_2 p_2 \dots + \beta_n p_n + B_n \cdot y_n + B_y \cdot y + N \end{aligned} \right\} \quad (1.2)$$

حيث أن  $\mu$  متغير عشوائى له خصائص احتمالية، ويعبر عن الاعتبارات الآتية:-

- 1- حذف أو استبعاد بعض المتغيرات ذات التأثير على المتغير التابع.
- 2- الجزء غير المنظم أو العشوائى فى السلوك الإقتصادى للإنسان.
- 3- أخطاء القياس والملاحظات.
- 4- أخطاء توصيف أو صياغة النموذج.
- 5- أخطاء التجميع.

وهذا يعنى أنه حتى يمكن الحصول على تقديرات لمعاملات النموذج  $\alpha, \beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n, \beta_y$ ، فإنه لابد من تحويل العلاقة الكاملة فى المعادلة رقم (1-1) إلى العلاقة الاحصائية الإحصائية بإضافة المتغير العشوائى  $\mu$ . وتجدر الإشارة إلى أن مجموع مربعات البواقي هو تقدير للخطأ العشوائى.

### المثال الثانى:

تقرر النظرية الإقتصادية أن استهلاك الأسرة يتوقف على مستوى الدخل الممكن التصرف فيه، ويعبر عن ذلك رياضيا كما يلى:

$$\left. \begin{array}{l} C_i = F(Y_i) \\ \text{أو} \\ C_i = \alpha + \beta_y + \beta_y \cdot Y_i \end{array} \right\} \quad (1-3)$$

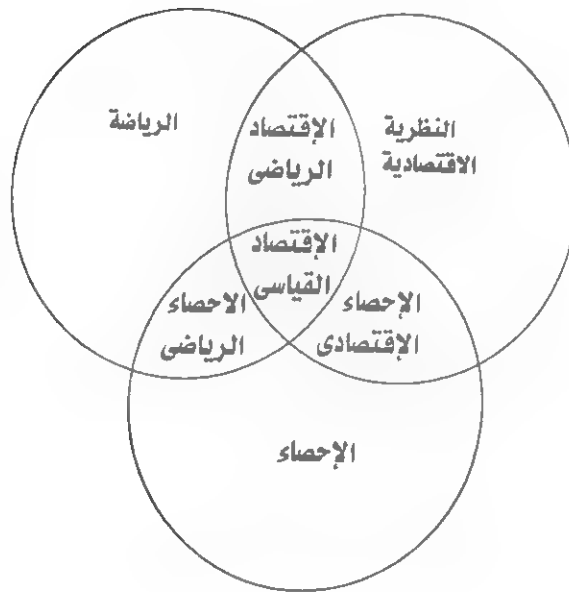
ويلاحظ أننا افترضنا أن هناك علاقة خطية بين الإنفاق الإستهلاكى  $C_i$  ومستوى الدخل الممكن التصرف فيه  $Y_i$  ، وأن معاملات (ثوابت) دالة الإستهلاك  $\alpha \times \beta_y$ . وهذه العلاقة كاملة بين الدخل الممكن التصرف فيه ( $Y_i$ ) والإستهلاك ( $C_i$ ). وتواجه الدالة رقم (1-3) بالخمسة عوامل السابقة، ولتحويلها إلى علاقة احتمالية أو إحصائية لابد من إضافة المتغير العشوائى الذى يحتوى على العوامل السابقة. وفى هذه الحالة تصبح العلاقة القياسية كما يلى:-

$$\left. \begin{array}{l} C_i = F(Y_i) + u_i \\ \text{أو} \\ C_i = \alpha + \beta_y + \beta_y \cdot y_i + u_i \end{array} \right\} \quad (1-4)$$

ومن العرض السابق يمكن تحديد علاقة الإقتصاد القياسى بالنظرية الإقتصادية والرياضية والإحصائية وتوصيفه بشكل واضح، من خلال الشكل رقم (1-1).

## شكل رقم (1-1)

يحدد علاقة الإقتصاد القياسى بالنظرية  
الإقتصادية والرياضية والإحصائية



## 2/1 ثلاثة أهداف لنظرية الإقتصاد القياسى:

هناك ثلاثة أهداف رئيسية تسعى نظرية الإقتصاد القياسى لتحقيقها:-

### 1/2/1 التحليل:-

ونعنى بالتحليل محاولة الإقتصاد القياسى اختبار النظرية الإقتصادية، وذلك عن طريق محاولة الحصول على الدليل العملى لاختبار القدرة التفسيرية للنظريات الإقتصادية، ولتقرير مدى شرح هذه النظريات للسلوك الفعلى للوحدات الاقتصادية.

### 2/2/1 وضع السياسات:

ونعنى بذلك محاولة الإقتصاد القياسى الحصول على تقديرات صحيحة لمعالم العلاقات الإقتصادية، والتي يمكن استخدامها فى اتخاذ القرارات ووضع السياسات الإقتصادية. ومن أمثلة هذه العلاقات التى يجب تقدير معالمها لتحديد السياسات الإقتصادية الملائمة:-

(1) تأثير الزيادة فى عجز الموازنة العامة على معدل أسعار الفائدة ومعدل التضخم.

(2) ما هى العلاقة بين مستوى معدل الفائدة ومستوى مؤشر دون جونسون الصناعى؟

(3) كيف يمكن أن يكون الاندماج والإتحاد بين المنشآت قوة فعالة للتأثير على عوائد الأوراق المالية؟

(4) كيف يؤثر العجز التجارى على مستوى التوظيف؟

(5) ما هى العلاقة بين كمية النقود، بفرض أنها  $M_1$  ، ومستوى النشاط الإقتصادى؟

(6) ما أثر رفع البنك المركزى لسعر الخصم على ظاهرة الركود

التضخمى Stagflation؟

(7) ما هى آثار تغيير قانون الضرائب على توزيع الدخل؟

(8) هل مستوى الرخاء الإقتصادى Economic Well-being يؤثر على

أنواع الجريمة التى تحدث فى المدن؟

وتجدر الإشارة إلى أن التقدير الصحيح للعلاقات بين المتغيرات السابقة،  
يعنى سياسات إقتصادية، أكثر قدرة على العلاج والتصحيح. وهذا ما يحاول  
الإقتصاد القياسى صنعه.

### 3/2/1 التنبؤ:

ونعنى بذلك استخدام الإقتصاد القياسى للتقديرات المتحصل عليها  
لمعلومات العلاقات الاقتصادية، فى التنبؤ بالقيم المستقبلية للمتغيرات  
الاقتصادية.

والتطبيقات الناجحة فى الإقتصاد القياسى، هى تلك التى تسعى إلى  
تحقيق الأهداف الثلاثة، من تحليل للنظرية وتقدير للمعالم والتنبؤ بالقيم  
المستقبلية للمتغيرات الاقتصادية.

### 3/1 فرع الإقتصاد القياسى:

يمكن التمييز بين فرعين لعلم الإقتصاد القياسى:-

#### 1- الإقتصاد القياسى النظرى:

عبارة عن ذلك الفرع من علم الإقتصاد القياسى، الذى يختص بتطوير  
طرق أو أساليب إحصائية لقياس العلاقات الاقتصادية التى يتم توصيفها عن  
طريق النماذج القياسية.



ويعتمد الإقتصاد القياسى فى هذا المجال بشكل كبير على الإحصاء الرياضى.

مثال ذلك دراسة طريقة المربعات الصغرى وفروضها، والآثار المترتبة على عدم توافر فرض أو أكثر من فروضها.

## 2. الإقتصاد القياسى التطبيقى:

وهو عبارة عن ذلك الفرع من علم الإقتصاد القياسى، الذى تطبق فيه أساليب الإقتصاد القياسى فى مجالات محددة من مجالات النظرية الإقتصادية. مثال دوال الطلب والعرض والإنتاج والإستهلاك والاستثمار. والهدف هنا هو قياس العلاقات الإقتصادية فى محال من هذه المجالات، واختبار مدى الاتفاق بين النظرية والواقع ومحاولة الحصول على تنبؤات خاصة بتطور الظاهرة فى المستقبل.

## 1 / 4. منهجية البحث فى الإقتصاد القياسى

يجب أن يعرف الباحث - فى مجال الإقتصاد القياسى - فكرة مبسطة عن منهج البحث القياسى التطبيقى ( إقتصاد تطبيقى بإستخدام أساليب الإقتصاد القياسى). وبصفة عامة هناك أربع خطوات للبحث فى الإقتصاد القياسى التطبيقى.

### 1- الخطوة الأولى: توصيف النموذج

تعتبر أهم الخطوات حيث يعتمد عليها الخطوات التالية. ويتطلب توصيف أو صياغة النموذج، تحديد الظاهرة المراد تفسيرها والعوامل التى يمكن أن تساعد على تفسير سلوكها. ويحاول الباحث القياسى فى هذه المرحلة دراسة العلاقة بين المتغيرات المختلفة عن هذه العلاقة فى صورة رياضية. وهذا ما نعينه بتوصيف النموذج، الذى يتم عن طريقه بحث الظاهرة محل

الدراسة تطبيقيا. ويعتمد توصيف النموذج على النظرية الإقتصادية وعلى كل ما يتوفر لدينا من معلومات عن الظاهرة محل الدراسة، وتتضمن عملية التوصيف على ما يلى:

(1)- تحديد المتغير التابع والمتغير أو المتغيرات المستقلة (المتغيرات التفسيرية).

(2)- معرفة التوقعات النظرية لما يمكن أن تكون عليه إشارات وقيم معالم الدوال، والتي يتم على أساسها تقييم التقديرات المتحصلة عليها لمعالم النموذج.

(3)- تحديد الشكل الرياضى للنموذج، من حيث عدد المعادلات التى يحتوى عليها وكونها خطية أو غير خطية.

(4)- تحويل النموذج الرياضى إلى نموذج إحصائى أو احتمالى (عشوائى) وذلك بإدخال العنصر أو المتغير العشوائى.

ويمكن عرض خطوات التوصيف السابقة من خلال مثال بسيط عن دالة الإستهلاك. هذه الدالة تجد أساسها النظرى فى النظرية الكينزية، والتى تعتبر أن الإستهلاك الكلى (متغير تابع) دالة فى الدخل الممكن التصرف فيه (متغير مستقل)، ويمكن صياغة الدالة رياضيا كما يلى:

$$C_t = f(Y_t) \quad (1-5)$$

حيث أن:

$C_t$  الإستهلاك الكلى خلال فترة زمنية.

$Y_t$  الدخل الممكن التصرف فيه خلال نفس الفترة لزمنية

$t$  الزمن.

إلا أنه يلاحظ أن السكان والمستوى العام للأسعار يؤثران فى الإستهلاك الكلى، لذلك يجب أخذهم فى الاعتبار كمتغيرات داخلية فى النموذج. ويمكن إعادة صياغة الدالة رياضيا كما يلى:

$$C_t = f(Y_t, N_t, P_t) \dots\dots\dots (1-6)$$

ويشير الرمز  $N_t$  إلى عدد السكان، بينما الرمز  $P_t$  إلى الرقم القياسى للأسعار. هذا ويمكن الاستعانة ببعض الدراسات التطبيقية التى تمت فى مجال الإستهلاك، فبعض الدراسات السابقة، تشير إلى أن الإستهلاك الجارى لا يتوقف فقط على الدخل الجارى، وإنما يمكن أن يتأثر بمستويات الدخل التى تـم الحصول عليها فى الفترات السابقة، وفى هذه الحالة يصبح النموذج كما يلى:-

$$C_t = f(Y_t, y_{t-1}, \dots\dots\dots, Y_{t-n}, N_t, P_t) \dots\dots\dots (1-7)$$

كما تشير بعض الدراسات السابقة أيضا، إلى أن الإستهلاك الجارى يعتمد على الإستهلاك فى الفترة الزمنية السابقة، أى أن دالة الإستهلاك الكلى يمكن كتابتها كما يلى:-

$$C_t = f(Y_t, y_{t-m}, C_{t-m}, N_t, P_t) \dots\dots\dots (1-8)$$

وتجدر الإشارة إلى أننا كتبنا دالة الإستهلاك فى صورتها العامة لكن من الضرورى فى حالة قياس أية علاقة، يجب أن تأخذ شكلا رياضيا محدداً. وعادة لا تقدم لنا النظرية الإقتصادية معلومات كافية بشأن طبيعة الدوال (مثلا خطية أو غير خطية). ولا شك أن لكل صورة رياضية نفترضها للدالة نتائج محددة. لذلك يكون من الضرورى محاولة تحديد الشكل المناسب للعلاقة الإقتصادية. ويمكن الاستعانة بشكل الإنتشار فى تحديد شكل العلاقة بين متغيرين، وما إذا كانت خط مستقيم أو منحنى، كما يمكن أن نلجأ إلى تجربة

الصيغ المختلفة على البيانات، لاختيار أفضلها من واقع القوة التفسيرية للنموذج، إلى جانب المبررات النظرية.

ومن الجدير بالذكر ونحن بصدد تحديد الشكل الرياضى للعلاقة الإقتصادية، يمكن أن تقدم لنا النظرية الإحصائية بعض المعايير التى يستعان بها فى الاختيار بين النماذج المختلفة. ومن أمثلة ذلك ما يعرف باسم الاختبارات المشتقة، والاختبارات غير المشتقة، Nested and Non-Nested Tests.

يأتى بعد ذلك تحديد الشكل الرياضى للعلاقة الإقتصادية، تحديد عدد المعادلات المستخدمة، فبعض الظواهر التى يعبر عنها بمعادلة واحدة، قد يكون فيه قدر كبير من الخطأ، بل يكون من المناسب تفسير الظاهرة عن طريق عدد من العلاقات أو المعادلات التى تتفاعل سوياً لتحديدها. هذا ولا تقرر النظرية الإقتصادية -دائماً- بطريقة صريحة عدد المعادلات التى تكفى لتفسير ظاهرة من الظواهر. وإذا نظرنا للمثال السابق الخاص بدالة الإستهلاك الكلى، ونلاحظ أن النظرية الإقتصادية لم تشير إلى عدد المعادلات التى يجب استخدامها للتعبير عن ظاهرة الدراسة. وقد تم التعبير عنها فى شكل معادلة رياضية واحدة. فى حين أن النظرة المتأنيبة والمتعمقة للعلاقة محل الدراسة، قد تكشف عن الحاجة لنموذج ذى علاقات أو معادلات متعددة. كأن تنظر مثلاً إلى معادلة الإستهلاك السابقة على أنها واحدة فى نموذج يتكون من عدة معادلات Simultaneous Equation models. ويمكن القول أن تحديد عدد المعادلات التى يتكون منها النموذج له دور كبير فى اختيار طريقة التقدير المناسبة لمعاملات النموذج، ومن ثم مدى الاطمئنان إلى جودة وسلامة التقديرات المتحصل عليها.

أما من حيث التوقعات النظرية لما يمكن أن تكون عليه إشارات وقيم المعالم، تلعب النظرية الإقتصادية دور كبير فى ذلك، وعلى سبيل المثال بفرض أن دالة الإستهلاك كما فى العلاقة رقم (1-5) أمكن التعبير عنها كما يلى:-

$$C_t = \alpha + \beta_y Y_t \dots\dots\dots (1-9)$$

فمن المعروف وفقاً للنظرية الإقتصادية

$$\alpha > 0 , \quad 1 > \beta > 0$$

مثل هذه التوقعات تساعد الباحث كثيراً، فوفقاً لها يتم تقييم التقديرات المتحصل عليها من النموذج.

وأخيراً وكما سبق أن ذكرنا، فإن المعادلة رقم (1-9) لا يمكن الإعتماد عليها فى عملية القياس، نظراً لوجود عوامل أخرى تؤثر على الإستهلاك الكلى بخلاف الدخل، بالإضافة إلى أخطاء القياس... الخ. لذلك فإن الأمر يتطلب تحويل العلاقة الرياضية إلى علاقة إحصائية أو احتمالية بإدخال المتغير العشوائى  $\mu_i$ . وبذلك تكون دالة الإستهلاك فى صورتها الإحصائية أو العشوائية القابلة للقياس كما يلى:

$$\left. \begin{array}{l} C_t = F(Y_t) + \mu_i \\ C_t = \alpha + \beta_y Y_t + \mu_i \end{array} \right\} \text{أو} \quad (1-10)$$

## 2. الخطوة الثانية: تقدير معالم النموذج:

تأتى الخطوة الثانية وهى تقدير معالم (أو معادلات) النموذج بإستخدام الطريقة المناسبة للتقدير. وتتطلب هذه المرحلة أن يكون الباحث ملماً بالمأما كاملاً بكافة طرق القياس والفروض الخاصة بكل طريقة، وتتضمن هذه المرحلة ما يلى:-

(1)- جمع البيانات عن جميع المتغيرات الداخلة فى النموذج وهناك نوعان

أساسيان من البيانات التى يمكن استخدامها فى تقدير معالم النموذج:

Time Series Data

أ- بيانات السلاسل الزمنية

Cross-Section Data

ب- البيانات المقطعية

ج- ويمكن دمج الإثنين معا فى شكل سلسلة زمنية من البيانات المقطعية.

وعلى الباحث القياسى أن يكون مدرك المشاكل المترتبة على إستخدام كل نوع من هذه البيانات، فى تقدير العلاقات وتفسيرها واستخدامها فى التنبؤ بالظاهرة محل الدراسة.

## (2)- دراسة الشروط الخاصة بالتمييز للدالة تحت الدراسة:

ونعنى بذلك أن يتحقق الباحث مما إذا كانت المعلمات التى يقدرها بإستخدام بيانات معنية وأسلوب إحصائى معين هى معلمات العلاقة محل الإهتمام. فعلى سبيل المثال إذا أردنا تقدير دالة الطلب على سلعة معينة فإن العلاقة يمكن صياغتها كما يلى:

$$Q_i = F(P_i) + \mu_i$$

$$Q_i = \alpha + \beta p_i + \mu_i$$

أو

(1-11)

حيث تشير:

$Q_i$  إلى الكميات،  $P_i$  إلى الأسعار،  $a$ ،  $b$  معلمات الدالة. وفي هذه الحالة قد لا نكون متأكدين إذا ما كانت العلاقة المقدرة هي دالة طلب أو علاقة عرض. حيث أن علاقة العرض تربط -أيضا- بين نفس المتغيرين، وقد يكون لها نفس الشكل. ويرجع ذلك -فى بعض الأحيان- إلى أن البيانات المتاحة قد لا تميز بين الكميات المطلوبة والكميات المعروضة - وإنما هي تغطى الكميات التوازنية  $Q_i$  التى تنتج عن تقاطع منحنى الطلب مع منحنى العرض.

(3) اختيار الطريقة أو الأسلوب المناسب لتقدير معالم النموذج، والفروض الخاصة بهذه الطريقة والمعنى الإقتصادى للتقديرات الخاصة بمعاملات النموذج. ويمكن تقدير معلمات العلاقات الاقتصادية بعدة طرق يمكن تصنيفها إلى مجموعتين رئيسيتين:-

#### المجموعة الأولى: طرق تقدير معالم المعادلة الواحدة.

وأهم هذه الطرق، طريقة المربعات الصغرى (OLS)، وطريقة المربعات الصغرى غير المباشرة (ILS) وطريقة المربعات الصغرى على مرحلتين (2SLS) وطريقة الإمكان الأعظم للمعلومات الكاملة (LiML).

#### المجموعة الثانية: طرق تقدير معلمات المعادلات الآتية:

وأهم هذه الطرق، طريقة المربعات الصغرى على ثلاث مراحل (3SLS)، طريقة الإمكان الأعظم للمعلومات الكاملة.

ويتوقف اختيار الطريقة المناسبة للتقدير على عدة عوامل أهمها:-

- (أ) - طبيعة العلاقة بين المتغيرات.
- (ب) - خصائص التقديرات المتحصل عليها من طريقة من طرق القياس، وتوافر الفروض الخاصة بكل طريقة.
- (ج) - بساطة الطريقة من حيث العمليات الحسابية اللازمة.
- (د) - الوقت والتكاليف اللازمين لتقدير معلمات النموذج.

### (3) الخطوة الثالثة: تقييم التقديرات:

تأتى الخطوة الثالثة لتقييم معلمات النموذج المقدرة- باستخدام ثلاث أنواع من المعايير:-

#### 1-المعايير الإقتصادية.

تحدد هذه المعايير، النظرية الاقتصادية. والتي تهتم بإشارات وقيم معلمات العلاقة الإقتصادية، مثال ذلك المرونات، القيم الحدية، المضاعفات، إشارات علاقات الطلب وعلاقات العرض....الخ. وعلى سبيل المثال تقدير دالة الطلب كما يلي:-

$$Q^D = \alpha + \beta^p p + \beta^1 p_1 + \dots + \beta^n p_n + \beta^y Y_1 + \dots \quad (1-12)$$

$\beta$  تكون ذات إشارة سالبة،  $\beta^1 \dots \beta^n$  ، تكون سالبة فى حالة السلع المكملة، وموجبة فى حالة السلع البديلة. بينما  $\beta^y$  تختلف إشاراتها وقيمتها وفقا لنوع السلعة بالنسبة للمستهلك، والتي تكون كمالية أو جيدة أو رديئة.

وإذا ظهرت بعض التقديرات بإشارة مخالفة لما تقدره النظرية الإقتصادية، فإنه ينبغى فى هذه الحالة رفض التقديرات لتناقضها مع النظرية، إلا إذا كان هناك سبب قوى يمكن أن نستدل عليه.

#### 2-المعايير الإحصائية:

تحدد هذه المعايير النظرية الإحصائية، والتي تهدف إلى تقييم التقديرات المتحصل عليها لمعلمات النموذج، وكذلك درجة الثقة فى هذه التقديرات. ومن أهم المقاييس الإحصائية معامل التحديد والخطأ المعيارى للتقدير.



وتجدر الإشارة إلى أن المعايير الإحصائية تأتى فى المرتبة الثانية بعد المعايير الإقتصادية، فإذا جاءت التقديرات ببعض المعلمات ذات إشارات أو قيم مخالفة فإنه ينبغى رفضها تماماً، حتى وأن كان معامل التحديد وتقديرات الخطأ المعيارى ذات اتجاهات صحيحة (معنوية إحصائية).

### 3- المعايير القياسية:

يحدد هذه المعايير نظرية الإقتصاد القياسى، وتهدف إلى إرشاد الباحث إلى ما ينبغى أن تكون عليه التقديرات المتحصل عليها، كذلك البحث عن مدى مطابقة فروض الأساليب القياسية، والتي تختلف باختلاف الطرق القياسية. معنى ذلك أن المعايير القياسية لها أهميتها من ناحيتين:-

(1)- أنها تحدد مدى إمكانية الاعتماد على المعايير الإحصائية، على سبيل المثال - كما سيأتى ذكره- تفترض طريقة المربعات الصغرى، أنه لا يوجد ارتباط تسلسلى بين الأخطاء فى النموذج أو بعبارة أخرى تفترض استقلال قيم هذه الأخطاء، فإذا لم يتحقق هذا الفرض فإن الأخطاء المعيارية للتقديرات لا يمكن أن يؤخذ بها كمعيار للمعنوية الإحصائية، حيث أنها تكون غير دقيقة فى قياس انتشار تقديرات كل معلمة حول القيمة الحقيقية (المجهولة) لهذه المعلمة.

(2)- أنها تحدد مدى تحقيق الخصائص المرغوب فيها فى التقديرات المتحصل عليها لمعاملات النموذج.

وفيما يلى عرض موجز لأهم الخصائص المرغوب توفرها فى تقديرات معاملات العلاقات الإقتصادية:-

## Unbiased

## أ. عدم التحيز

يعرف التحيز فى تقدير معلمة معينة  $\theta$  بأنه عبارة عن الفرق بين التوقع الرياضى (أو الوسط الحسابى) لتقديرات المعلمة  $\hat{\theta}$  والقيمة الحقيقية لها، أى أن التحيز يساوى:-

$$\text{Bias} = E(\hat{\theta}) - \theta$$

معنى ذلك يمكن القول أن  $\hat{\theta}$  تقدير غير متحيز للمعلمة  $\theta$  إذا كان التحيز صفر، أى إذا كان:-

$$E(\hat{\theta}) = \theta$$

ويمكن توضيح معنى هذه الخاصية على النحو التالى:-

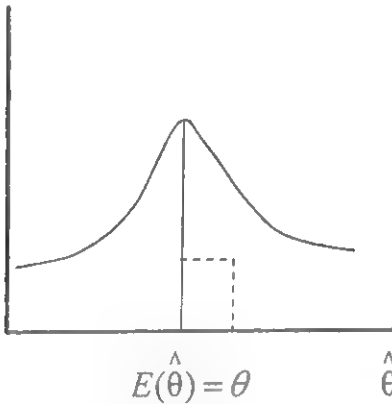
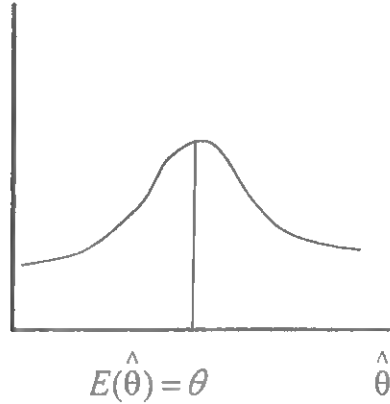
نفرض أننا نقيس قيمة المعلمة  $\theta$  من عينة معينة حجمها  $n$ ، وأنها كررنا عملية القياس لهذه المعلمة باستخدام عدد كبير جداً من العينات التى لها نفس الحجم. فى هذه الحالة سيكون لدينا عدد كبير جداً من التقديرات للمعلمة  $\theta$ . ويمكن تكوين توزيع إحصائى لتقديرات هذه المعلمة وسطه الحسابى يساوى  $E(\hat{\theta})$ . على ذلك فإذا كانت القيمة المقدرة للمعلمة يتوزع حول وسط حسابى قيمته مساوية للقيم الحقيقية للمعلمة  $\theta$  كما فى الشكل رقم (1-2) فإننا نقول أن التقدير غير متحيز. أما إذا كانت القيم المقدرة تتوزع حول وسط حسابى قيمته مختلفة عن القيمة الحقيقية للمعلمة، كما فى الشكل رقم (1-3)، فإننا نقول أن التقدير متحيز.

شكل رقم (3-1)

تقدير متحيز

شكل رقم (2-1)

تقدير غير متحيز

 $P(\hat{\theta})$  $P(\theta)$ 

## Minimum Variance

## ب- اصغر تباين

إذا سحبنا عدداً كبيراً من العينات ذات حجم معين  $n$ ، وحسبنا من كل عينة وفقاً لطريقة تقدير معينة القيمة التقديرية المعلمة  $(\hat{\theta})$  فإننا سوف نحصل على مجموعة كبيرة من هذه التقديرات لقيمة المعلمة الحقيقية غير المعلومة  $\theta$ ، وهذه القيم التقديرية تنتشر حول وسطها الحسابى  $E(\hat{\theta})$  يتباين  $\text{var}(\hat{\theta})$  بحسب كما يلى:

$$\text{Var} \hat{\theta} = E[\hat{\theta} - E(\hat{\theta})]^2$$

$$= E[(\hat{\theta})^2 - E(\hat{\theta})^2]$$

وإذا كان هذا التباين أصغر من تباين كل التقديرات التى يمكن الحصول عليها بتطبيق أساليب قياس أخرى للمعلمة  $\theta$ . فنقول أن التقدير  $\hat{\theta}$  يتمتع بأصغر تباين. على ذلك إذا كان  $\hat{\theta}^{\wedge\wedge}$  أى تقدير آخر للمعلمة  $\theta$  فإن خاصية أصغر تباين يمكن التعبير عنها كما يلى:-

$$\text{Var}(\hat{\theta}) \leq \text{Var} \hat{\theta}^{\wedge\wedge}$$

جـ- الكفاءة Efficiency

يقال أن تقديراً معيناً  $\hat{\theta}$  للمعلمة  $\theta$  تقدير كفاء إذا توفرت فيه الخاصيتان الآتيتان:-

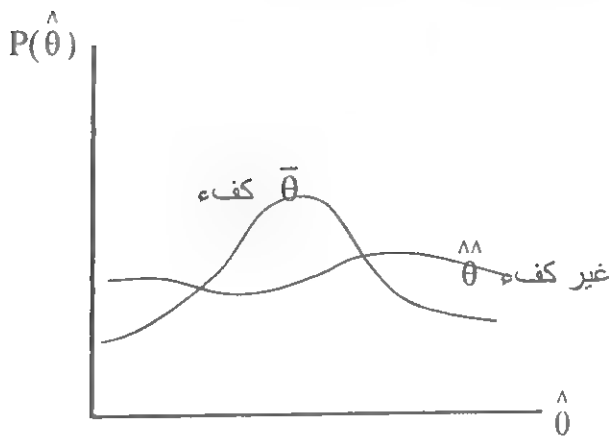
$$E(\hat{\theta}) = \theta \quad -1$$

$$\text{Var}(\hat{\theta}) \leq \text{Var}(\hat{\theta}^{\wedge\wedge}) \quad -2$$

ويوضح ذلك الشكل رقم (4-1)

شكل رقم (4-1)

بوضح المقارنة بين التقدير الكفاء وغير الكفاء



### د- أفضل تقدير خطى غير متحيز

Best Linear unbiased (Blue)

يعرف التقدير الخطى بأنه ذلك التقدير الذى يمكن صياغته كدالة خطية فى قيم المتغير التابع. ويقال أن تقديراً معيناً وليكن  $\hat{\theta}$  أفضل تقدير خطى غير متحيز للمعلومة  $\theta$  إذا توافرت الشروط الآتية:-

$$1- \text{ أن يكون غير متحيز } E(\hat{\theta}) = \theta$$

$$2- \text{ أن يكون له أقل تباين ممكن } Var(\hat{\theta}) \leq Var(\hat{\theta}')$$

حيث أن  $\hat{\theta}'$  تقدير آخر للمعلمة  $\theta$

3- دالة خطية لقيم المتغير التابع.

هـ- أصغر متوسطات لمربعات الأخطاء

Minimum Mean Square Error.

وتعتبر هذه الخاصية مزيجاً من خاصيتى عدم التحيز وأصغر تباين، ويعبر عنها كما يلى:-

$$MSE(\hat{\theta}) = var(\hat{\theta}) + [Bias(\hat{\theta})]^2$$

أى أن متوسط مربعات الخطاء عبارة عن تباين التقدير مضافاً إليه مربع تحيزه.

## و- الكفاية Sufficiency

يعتبر التقدير كافيا Sufficient، إذا كان مقدرا بطريقة تستخدم كل المعلومات المتوفرة في العينة عن المعلمة الحقيقية. أى إذا كانت تستخدم كل مشاهدات العينة في تقدير المعلمة  $\theta$ . فالوسط الحسابى للعينة  $\bar{X} = \frac{1}{n} \sum X$ . يعتبر تقديرا كافيا لمتوسط المجتمع، لأننا نستخدم كل بيانات العينة، أما الوسيط والنوال لا تعتبر تقديرات كافية، لأن بعض مشاهدات العينة تستخدم فقط في حسابها.

### الخطوة الرابعة: تقييم القوة التنبؤية للنموذج:

تمثل المرحلة الأخيرة من مراحل البحث القياسى، وتهتم بتقييم القوة أو القدرة التنبؤية للنموذج. حيث يعتبر الغرض من الحصول على تقديرات لمعالم النموذج، هو إيمان استخدامها في التنبؤ بالقيم المستقبلية للمتغيرات، ويمكن تقييم اختبار القدرة التنبؤية للنموذج كما يلى:-

#### 1- الطريقة الأولى:

قياس مدى استقرار التقديرات، أى مدى حساسيتها للتغير فى حجم العينة. وتتلخص هذه الطريقة فى إضافة مشاهدات أو بيانات جديدة للعينة الأصلية السابق استخدامها فى تقدير معالم النموذج. تم إعادة عملية التقدير باستخدام العينة الجديدة (الأصلية مضافاً إليها البيانات الجديدة). وطبعاً أن تختلف التقديرات المتحصل عليها من بيانات العينة الأولى (الأصلية). ويمكن اختبار الفرق بين التقديرات إحصائياً بالطرق الإحصائية المناسبة. فإذا كان الفرق معنوياً دل ذلك على ضعف القوة التنبؤية للنموذج.

## 2. الطريقة الثانية:

وتتلخص هذه الطريقة فى إستخدام التقديرات المتحصل عليها من بيانات العينة فى النموذج، لفترة أخرى لا تدخل فى فترة العينة الأولى، بمعنى الحصول على تقدير للمتغير التابع من العينة فى فترة أخرى لم تكن تشملها العينة، كذلك تكون القيمة الحقيقية للمتغير التابع معروفة خلال هذه الفترة. ثم نقارن القيم المتحصل عليها للمتغير التابع (قيم التنبؤ المقدرة) مع القيم الفعلية له. وعادة يكون هناك إختلاف بين القيم المقدرة (قيم التنبؤ) والقيم الفعلية. ويتم عمل اختبار إحصائى للفرق بين القيم المقدرة والفعلية لمعرفة مدى معنوية هذه الفروق. فإذا كان الفرق معنوياً، كانت القدرة التنبؤية للنموذج حقيقية. وهناك عدة تـؤدى إلى ضعف القدرة التنبؤية للنموذج منها:-

(أ) - عدم دقة البيانات الخاصة بالمتغيرات التفسيرية.

(ب) - عدم دقة التقديرات الخاصة بالنموذج.

(ج) - تغير الظروف الخاصة بالنموذج.

الفصل الثاني:

النماذج الاقتصادية

Economic Models





تم مناقشة توصيف الاقتصاد القياسى فى الفصل الأول، كذلك خطوات البحث القياسى التى يجب أن يتبعها الباحث فى مجال الاقتصاد القياسى. وعرفنا أن الخطوة الأولى فى هذا المجال تتمثل فى توصيف أو صياغة النموذج، بهدف الحصول على تقديرات لمعاملات المعادلة (أو المعادلات) التى تحتويها. وتعتبر عن العلاقات الاقتصادية بين المتغيرات التى تدخل فى النموذج محل الدراسة. لذلك سوف يتم مناقشة مفهوم النماذج و المتغيرات الداخلة فيها ومعادلاتها وأنواعها فى هذا الفصل.

## 2 / 1- تعريف النموذج الاقتصادى

يعرف النموذج الاقتصادى بأنه عبارة عن مجموعة من العلاقات توضحها النظرية الاقتصادية وتربط بين مجموعة من المتغيرات الاقتصادية، والتى يعبر عنها فى صورة معادلات تشرح العلاقة بين هذه المتغيرات. ويمكن توضيح مفهوم النموذج من خلال المعادلتين التاليتين:-

### المثال الأول:

النموذج الاقتصادى لسوق السيارات والذى يتكون من ثلاث علاقات حددتهم النظرية الاقتصادية كما يلى:

- 1- علاقة طلب السيارات بسعرها عكسية.
- 2- علاقة عرض السيارات بسعرها طردية.
- 3- شرط توازن سوق السيارات تساوى الكمية المطلوبة مع الكمية المعروضة.

وهناك ثلاث متغيرات فى النموذج بينهم العلاقات، الكمية المطلوبة،  $(Q_d)$ ، والكمية المعروضة  $(Q_s)$ ، السعر  $(P)$ . ويمكن التعبير عن هذه

العلاقات فى شكل معادلات رياضية - يجب أن تساوى عدد المعادلات عدد المتغيرات - كما يلى:-

$$Q_d = \bar{f}(p) \dots\dots (2-1)$$

$$Q_s = F^+(p) \dots\dots (2-2) \quad \text{شكل رقم (1-2)}$$

$$Q_d = Q_s \dots\dots (2-3)$$

ويطلق على الشكل رقم (1-2) النموذج الإقتصادى.

### المثال الثانى: نموذج كينز للدخل القومى

لسهولة عرض النموذج نفترض أن الإقتصاد القومى مكون من قطاعين فقط، هما القطاع العائلى والذى يقوم بالإنفاق الإستهلاكى وقطاع الأعمال الخاص الذى يقوم بالإنفاق الإستثمارى. ويتكون هذا النموذج من ثلاث علاقات حددتهم النظرية الإقتصادية كما يلى:

1- علاقة الإستهلاك الكلى بالدخل القومى وهى علاقة طردية: وبميل (الميل الحدى للإستهلاك) أكبر من الصفر وأقل من الواحد. كذلك يتزايد الإستهلاك بنسبة أقل من زيادة الدخل.

2- علاقة الإستثمار، ونفترض النظرية الإقتصادية أنه ثابت.

3- علاقة تعريفية، والتى تعرف الدخل القومى بأنه مجموع الإستهلاك والإستثمار.

وهناك ثلاث متغيرات فى النموذج، الإستهلاك الكلى (C)، الإستثمار (I)، والدخل القومى (Y). ويمكن التعبير عن هذه العلاقات فى شكل معادلات رياضية كما يلى:

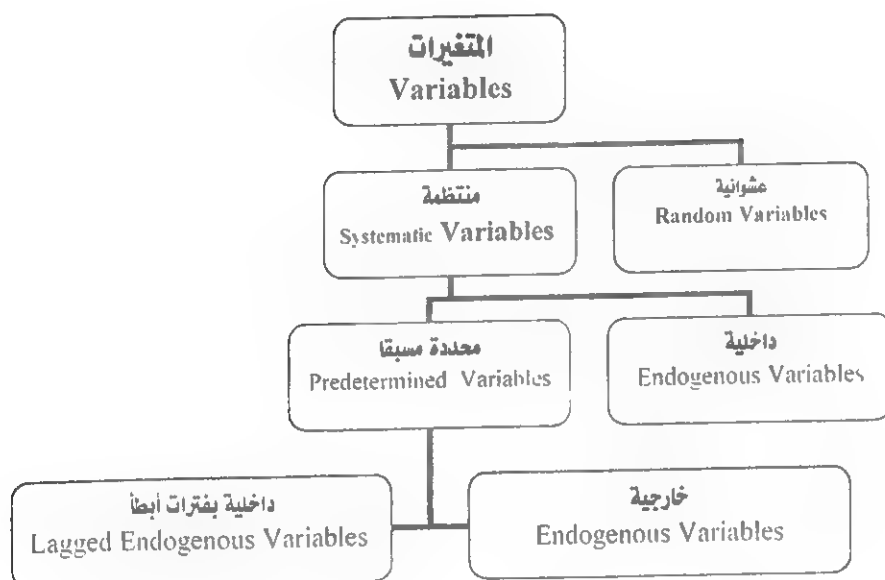
$$\begin{array}{lcl}
 C = f(y) \dots\dots & (2-4) & \\
 I = \bar{I}_0 \dots\dots & (2-5) & \\
 Y = C + \bar{I} \dots\dots & (2-6) & 
 \end{array}
 \left. \vphantom{\begin{array}{l} C = f(y) \\ I = \bar{I}_0 \\ Y = C + \bar{I} \end{array}} \right\} \begin{array}{l} \text{عدد المتغيرات - كما يلي:-} \\ \\ \text{شكل رقم (2-2)} \end{array}$$

ويطلق على الشكل رقم (2-2) النموذج الإقتصادي. وتختلف النماذج الاقتصادية فيما بينها، من حيث أنواع المتغيرات التي تحتويها وكذلك المعادلات التي تتكون منها. ولتفهم الأنواع المختلفة للنماذج الاقتصادية يجب دراسة أنواع المتغيرات والمعادلات التي يمكن أن تحتويها النماذج.

## 2/2 متغيرات النموذج الإقتصادي

تحتوي معادلات أي نموذج إقتصادي على عدد من المتغيرات الاقتصادية. تختلف هذه المتغيرات وفقا لطبيعة المشكلة الاقتصادية محل البحث. ويمكن تقسيم المتغيرات التي تحتويها المعادلات في أي نموذج بشكل عام كما في الشكل رقم (2-3).

شكل رقم (2-3)  
متغيرات النموذج الاقتصادي  
وتقسيماتها المختلفة



يتضح من الشكل رقم (2-3) أن المتغيرات التي يمكن أن تحتويها معدلات النموذج تنقسم إلى نوعين رئيسيين:-

### 1- المتغيرات المنتظمة Systematic Variables

وهي تلك المتغيرات التي تدخل في النموذج بصورة صريحة وواضحة، وتعبّر عن مفهوم واضح ومحدد المعنى. فعلى سبيل المثال، عند تحديد عدد المتغيرات التي يمكن أن تدخل في دالة الطلب، فإن الباحث لا يستطيع أن يأخذ في الاعتبار جميع المتغيرات، وإلا فقدت الدالة أهميتها، لذلك فهو يلجأ إلى الإكتفاء بعدد محدود من المتغيرات الكمية ذات الصلة الوثيقة بالدالة. والتي تتغير بصورة منتظمة أو يكون تأثيرها على الدالة واضحاً، مثال ذلك سعر السلعة، أسعار السلع الأخرى، دخل المستهلك، مثل هذه المتغيرات يطلق عليها متغيرات منتظمة.

### 2- المتغيرات العشوائية Random Variables

هي تلك المتغيرات التي لا تظهر في المعادلات بصورة صريحة ولا تعتبر متغيرات واضحة ومحددة المعنى. ومن هذه المتغيرات -كما في المثال السابق عن دالة الطلب - المتغيرات النوعية التي لا يمكن قياسها أو التعبير عنها كمياً مثل أذواق المستهلكين أو الحروب أو الأزمات أو تغير توزيع الدخل، أو عادات وميول المستهلكين، كذلك قد تكون متغيرات كمية ولكن أهميتها أقل. ولذلك تجمع هذه المتغيرات في شكل متغير واحد، يعبر عن النتيجة النهائية لهذه المتغيرات، ويكون هذا المتغير الجديد عشوائياً، حيث أنه لا يعبر عن ظاهرة محددة أو مفهوم واضح، ولكنه يعبر عن نتيجة مجموعة كبيرة متنافرة من المتغيرات الأخرى، بالإضافة إلى أخطاء القياس... الخ

وهذا النوع من المتغيرات هو الذى يميز النموذج القياسى عن النموذج الرياضى.

هذا وتنقسم المتغيرات المنتظمة إلى نوعين أساسيين من المتغيرات:-

### المتغيرات الداخلية Endogenous Variables

وهى تلك المتغيرات التى تحدد قيمتها داخل النموذج الإقتصادى، الذى يمثل الظاهرة محل البحث، وذلك بعد معرفة التقديرات العددية لمعالم النموذج وقيم المتغيرات الأخرى فيه.

### المتغيرات المحددة مسبقا Predetermined Variables

وهى المتغيرات التى لا تتحدد قيمتها عن طريق النموذج محل الدراسة، وإنما تتحدد بعوامل أخرى خارجة عن النموذج. ومن ثم لا تعامل على أنها متغيرات بقدر ما تعامل على أنها معطيات أو ثوابت. ومعنى ذلك أن هذه المتغيرات تؤثر على المتغيرات المحددة مسبقا فى النموذج، ولكن على الباحث القياسى أن يكون حذرا عند تحديد عدد هذه المتغيرات، حيث أنه كلما زاد عددها كلما ازدادت الأمور تعقيدا كنتيجة لزيادة البيانات المطلوبة وصعوبة العمليات الحسابية.

كذلك تنقسم المتغيرات المحددة مسبقا إلى متغيرات خارجية Exogenous Variables ومتغيرات داخلية محددة فى فترات سابقة أو ذات فترات إبطاء Lagged Endogenous Variables.

وبالرجوع إلى المثال السابق عن نموذج التوازن لسوق السيارات، فإننا نجد أن الكمية المطلوبة من سلعة السيارات  $Q_D$  يحددها السعر  $(P)$  كما فى المعادلة (1-2)، كذلك الكمية المعروضة من السيارات  $Q_S$  يحددها أيضا

السعر  $P$  كما في المعادلة رقم (2-2)، ويتحدد السعر بدوره عن طريق التفاعل بين الطلب والعرض كما في المعادلة رقم (3-2).

ويلاحظ أن المتغيرات الداخلية في هذا النموذج ثلاثة هي  $Q_D$  ،  $Q_S$  ،  $P$  ، وهو نفس عدد المعادلات التي يحتويها، وعلى ذلك فالنموذج يكون كاملاً: وإذا أعدنا صياغة النموذج بصورة أخرى كما يلي:

$$Q_D = F(P, \bar{y}) \quad (7-2)$$

$$Q_S = F(P, CO) \quad (8-2)$$

$$D = S \quad (9-2)$$

وتوضح المعادلة رقم (7-2) أن الكمية المطلوبة دالة في السعر ودخل المستهلك. بينما توضح المعادلة رقم (8-2) أن الكمية المعروضة دالة في سعر السلعة وتكلفة الإنتاج  $CO$  ، بينما تعطي المعادلة رقم (9-2) شرط التوازن، في هذا النموذج نجد أن الكمية المطلوبة تتحدد عن طريق السعر ودخل المستهلك وبالتالي تعتبر  $Q_D$  متغير داخلي، كذلك نجد الكمية المعروضة من السلعة يحددها سعر السلعة وتكلفة الإنتاج، ومن ثم تعتبر  $Q_S$  متغير داخلي أيضاً، كما أن السعر  $P$  يتحدد بالتفاعل بين قوتي العرض والطلب. ومن ثم يعتبر متغير داخلي. ويلاحظ أن عدد معادلات النموذج يساوي عدد المتغيرات الداخلية  $(P, Q_S, Q_D)$ ، أما بالنسبة للمتغيرين الآخرين وهما الدخل وتكلفة الإنتاج نجد أن قيمتهما لا تتحدد داخل النموذج، بل يحددهما عوامل أخرى عديدة خارج النموذج، ومن ثم فإنهما يعتمدان متغيران خارجيان ويعاملان كثوابت.

ومن ناحية أخرى إذا أعدنا صياغة نموذج كينز للدخل القومي السابق الإشارة إليه، ليصبح أكثر واقعية على التالي:



$$C = F(Y) \dots\dots\dots (10-2)$$

$$C = F(Y-1, R) \dots\dots\dots (11-2)$$

$$C = C + I + E \dots\dots\dots (12-2)$$

حيث أن  $Y_1$  قيمة الدخل في الفترة السابقة،  $R$  سعر الفائدة،  $E$  الإنفاق الحكومي. ويمكن أن نستنتج من هذا النموذج أن كلا من الاستهلاك ( $C$ ) والدخل ( $Y$ ) و الاستثمار ( $I$ )، متغيرات داخلية، لأنها تتحدد في النموذج محل الدراسة. أما سعر الفائدة ( $R$ ) والإنفاق الحكومي ( $E$ ) والدخل في الفترة السابقة ( $Y_1$ ) تعتبر متغيرات محددة مسبقاً، حيث  $R$ ،  $E$  متغيرات خارجية  $Y_1$  يعتبر متغير داخلي ذو فترة إبطاء واحدة.

### 3/2 - معادلات النموذج:

بعد تعريف النموذج الإقتصادي، واستعراض أنواع المتغيرات التي يمكن أن يحتويها هذا النموذج في شكل معادلات رياضية، نأتى إلى تحديد الشكل الرياضى الذى تأخذه هذه المعادلات من حيث كونها خطية أو غير خطية، حيث يؤثر هذا الشكل على التقديرات المتحصل عليها للمعاملات. لذلك يكون من الضروري محاولة تعيين الشكل المناسب للعلاقة الإقتصادية خاصة وأن النظرية الإقتصادية لا تقدم لنا المعلومات الكافية عن طبيعة الدوال والصورة الرياضية لهذه الدوال.

ويمكن الاستعانة بشكل الإنتشار في تحديد شكل العلاقة بين متغيرين، ومعرفة ما إذا كانت هذه العلاقة يمكن تمثيلها في شكل خط مستقيم أو منحنى. كذلك يمكن أن نلجأ إلى تجربة الصيغ المختلفة على البيانات لاختيار أفضلها باستخدام معايير إحصائية مناسبة إلى جانب التبررات النظرية.

وتأخذ العلاقة بين أى متغيرين  $Y$  ،  $X$  أحد الأشكال التالية:

### 1. العلاقة الخطية

يمكن صياغة العلاقة الخطية بين المتغير التابع (Y) والمتغير المستقل (X) [أو يطلق عليه المتغير التفسيري] كما فى المعادلة رقم (13-2) التالية:

$$Y = \alpha + \beta x \dots\dots\dots (13-2)$$

وتعتبر الصيغة رقم (13-2) هى الشكل المناسب للعلاقة بين المتغيرين Y و X، وطريقة المربعات الصغرى هى أهم طرق القياس المستخدمة فى تقدير معاملات العلاقات الخطية  $(\alpha, \beta)$ .

### 2. العلاقة الخطية بين Y ومقلوب X

ويمكن حساب هذه العلاقة كما فى المعادلة رقم (14-2) التالية:-

$$Y = \alpha + \beta \cdot \frac{1}{X} \dots\dots\dots (14-2)$$

وهذه المعادلة يمكن تحويلها إلى الصورة الخطية، وذلك بعمل التحويل التالى:

$$X^* = \frac{1}{X}$$

$$Y = \alpha_1 + \beta \cdot X^* \dots\dots\dots (14-2')$$

### 3. العلاقة غير الخطية:

تعتبر العلاقة غير الخطية بين المتغيرين X، Y علاقة من الدرجة الثانية، ويمكن صياغتها فى المعادلة رقم (15-2) التالية:

$$Y = \alpha + \beta_1 X + \beta_2 X_2 \dots\dots\dots (15-2)'$$

ويمكن تحويل هذه المعادلة إلى الصورة الخطية فى متغيرين كما يلى:  
بفرض أن:

$$\begin{aligned} X_1 &= X \\ X_2 &= X^2 \end{aligned}$$

فى هذه الحالة يمكن إعادة كتابة المعادلة كما يلى:-

$$Y = \alpha + \beta_1 X_1 + \beta_2 X_2 \dots\dots\dots (15-2)'$$

ويلاحظ أن معلمات المعادلة (15-2) هي نفسها معلمات المعادلة الأصلية رقم (15-2). وإن كان هذا التحويل سوف يؤدي إلى بعض المشكلات القياسية - والتي سيأتى شرحها فيما بعد- ومن أهمها عدم استقلالية المتغيرات المستقلة.

#### 4- العلاقة الأسية بين المتغيرين X, Y:

يمكن صياغة العلاقة الأسية بين متغيرين X, Y كما فى المعادلة رقم (16-2) التالية:

$$Y = \alpha X^\beta \dots\dots\dots (16-2)'$$

وهذه المعادلة يمكن تحويلها إلى الصورة الخطية بأخذ اللوغاريتم الطبيعى للطرفين كما يلى:-

$$\left. \begin{aligned} \text{Log } Y &= \text{log } \alpha + \beta \text{ log } x \\ &\text{أو} \\ Y^* &= \alpha_1 + \beta X^* \end{aligned} \right\} (16-2)'$$

حيث أن:

$$Y^* = \text{Log } Y$$

$$X^* = \text{Log } X$$

$$\alpha_1 = \text{Log } \alpha$$

ومعنى ذلك أن المعادلة الأسية رقم (16-2) أمكن تحويلها إلى معادلة خطية في لوغاريتمات المتغيرين كما في المعادلة رقم (16-2)'. ويلاحظ أن  $\beta_2$  في المعادلة رقم (16-2)' هي نفسها في المعادلة رقم (16-2)،

$$\therefore \alpha_1 = \log \alpha \quad (16-2)$$

$$\therefore \alpha = e^{\alpha_1} = \text{Antilog } (\alpha_1)$$

### 5. العلاقة نصف اللوغاريتمية:

يمكن صياغة العلاقة النصف اللوغاريتمية بين المتغيرين  $X, Y$  كما في المعادلتين رقم (17-2)، (18-2) التاليتين:-

$$Y = \alpha + \beta \log x \dots\dots (17-2)$$

أو

$$Y = \alpha + \beta \text{Log } x \dots\dots (18-2)$$

ويمكن كتابة المعادلة رقم (18-2) في الصورة الأسية كما يلي:

$$Y = e^{\alpha + \beta X}$$

ويمكن تحويل المعادلتين رقم (17-2)، (18-2) إلى الصورة الخطية

كما يلي:-

$$Y = \alpha + \beta X^* \dots\dots\dots (17-2)'$$

حيث أن

$$X^* = \log X$$

$$Y^* = \alpha + \beta X \dots\dots\dots$$

(18-2)

حيث أن

$$Y^* = \text{Log } Y$$

يمكن القول بعد استعراض الجزء السابق - من هذا الفصل - أن هناك خمس أشكال للمعادلات الرياضية التي يتضمنها النموذج. وتعتبر العلاقة الخطية هي أفضل هذه الأشكال. وتسمى المعادلات التي يتضمنها النموذج الإقتصادي بالمعادلات الهيكلية Structural Equations وذلك نظرا لما تعرضه هذه المعادلات من هيكل أساسي للعلاقات الاقتصادية للوحدة الاقتصادية التي يتعامل معها الباحث القياسي. هذا وتختلف عدد المعادلات في النموذج الإقتصادي، تبعا لسهولة أو صعوبة تفسير الظاهرة محل البحث، والأهداف التي يسعى الباحث إلى تحقيقها من صياغة النموذج.

ويمكن تقسيم المعادلات الهيكلية إلى نوعين رئيسيين كما يلي:-

### 1. المعادلات الاقتصادية:

تعتبر الدالة (المعادلة) دالة اقتصادية إذا كانت تحتوي على عنصر (متغير) السعر، ومن ثم يحددها الإقتصادي، وتنقسم المعادلات الاقتصادية إلى:-

#### Behavioral Equations

#### أ. المعادلات السلوكية

نصنف المعادلة بأنها معادلة سلوكية إذا كانت توضح علاقة دالية بين متغيرين أو أكثر، وتكون هذه العلاقة ناشئة أساسا من سلوك معين من جانب الأفراد أو من جانب العناصر المختلفة التي تؤثر على الدالة وتظهر ردود

فعلهم نتيجة للتغيرات التي تحدث في بعض المتغيرات. ومن أمثلة المعادلات السلوكية، معادلات العرض والطلب التي تصنف السلوك الاقتصادي للمنتجين والمستهلكين، وتفسير القرارات الاقتصادية التي يتخذونها.

### Definitional Equations

### ب. المعادلة التعريفية

ينظر إلى المعادلة باعتبارها معادلة تعريفية، إذا كانت تعرف:-

(1)- وضعاً معيناً، مثال ذلك معادلات شرط التوازن في نماذج أسواق السلع المختلفة، والذي ينص على أن التوازن في السوق يتحقق عندما تتساوى الكمية المطلوبة مع الكمية المعروضة أي أن  $Q_D = Q_S$ . مثل هذه المعادلة لا تظهر سلوكاً معيناً أو رد فعل معين، ولكنها تكتفى فقط بتعريف حالة التوازن.

(2)- متغيراً معيناً، مثال ذلك تعريف الدخل القومي بأنه مجموع الاستهلاك الكلي والإنفاق الاستثماري  $Y = C + I$ . مثل هذه المعادلة -أيضاً- لا تظهر سلوكاً معيناً ولكنها تكتفى فقط بتعريف الدخل القومي.

(3)- أو تعطى قيم محددة لأحد المتغيرات.

### Technical Equations

### 2. المعادلات الفنية

تعتبر الدالة (المعادلة) دالة فنية إذا كانت لا تحتوى على عنصر السعر، ومن ثم تحدد من قبل الفنيين والمهندسين. وتوضح المعادلة في هذه الحالة علاقة فنية بحتة بين المتغيرات. ومن أمثلتها دالة الإنتاج، التي توضح العلاقة بين حجم الإنتاج الكلي للمنشأة ومدخلات العملية الإنتاجية، ومن أشهر هذه الدوال، دالة إنتاج كوب دوجلاس والتي تأخذ الشكل التالي:-

$$X = \Lambda q_L^\alpha \cdot q_K^\beta \dots \dots \dots (19 - 2)$$

حيث أن:

 $q_l$  الكمية المستخدمة كمدخلات من عنصر العمل. $q_K$  الكمية المستخدمة كمدخلات من رأس المال. $X$  كمية الإنتاج الكلي. $\alpha, \beta$  معطمان $A$  قيمة ثابتة في الدالة.

#### 4/2 أنواع النماذج الاقتصادية وفقا للمتغيرات التي تحتويها

تنقسم النماذج الاقتصادية من حيث أنواع المتغيرات التي تحتويها إلى نوعين أساسيين:-

##### 1- النماذج غير الاحتمالية

تنقسم النماذج الاقتصادية من حيث أنواع المتغيرات التي تحتويها إلى نوعين أساسيين:-

##### 2 - النماذج غير الاحتمالية:

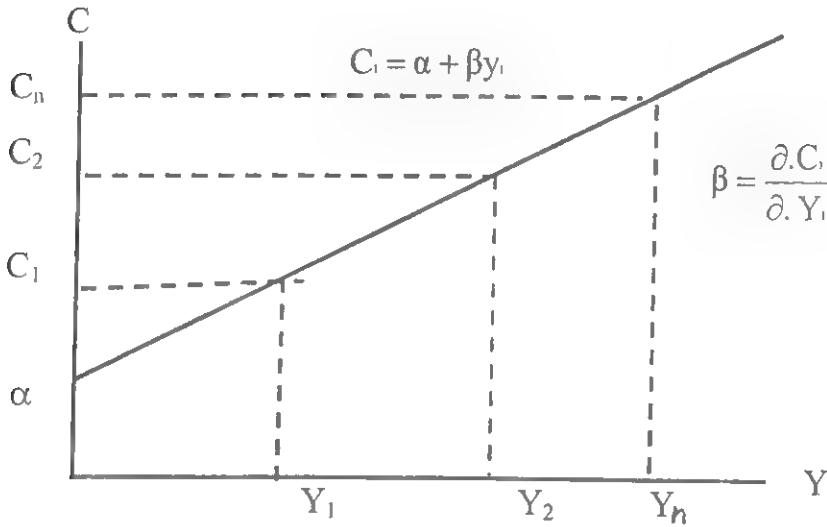
وهي تلك النماذج التي توضح وجود علاقة تامة بين المتغيرات المختلفة، ومثل تلك النماذج يفترض الاقتصاد الرياضي وجودها، وعلى سبيل المثال، إذا أخذنا دالة الاستهلاك، والتي تقرر النظرية الاقتصادية أن الاستهلاك الكلي يتوقف على الدخل الممكن التصرف فيه فقط، وأن العلاقة بينهم هامة كما في المعادلة رقم (20-2) التالية:

$$C_t = \alpha + \beta Y_t \dots\dots\dots (20-2)$$

هذا يعنى أن الإستهلاك الكلى يتحدد فقط عن طريق الدخل الممكن التصرف فيه، وليست هناك عوامل أخرى أو إعتبارات أخرى تؤثر فى الإستهلاك. وتمثل هذه الدالة فى شكل خط مستقيم كما فى الشكل رقم (2-2).

### شكل رقم (2-2)

علاقة الإستهلاك بالدخل الممكن التصرف فيه



يتبين من الشكل رقم (2-2) و المعادلة رقم (2-2) أنه لكل مستوى من مستويات الدخل  $Y_n, Y_2, Y_1$ ، مستوى محدد من الإستهلاك  $C_n, C_2, C_1$ . وهذا النوع من النماذج (غير الإحتمالية) يتعامل معه فقط الإقتصاد الرياضى، وليس الإقتصاد القياسى.



## 2. النماذج الإحتمالية:

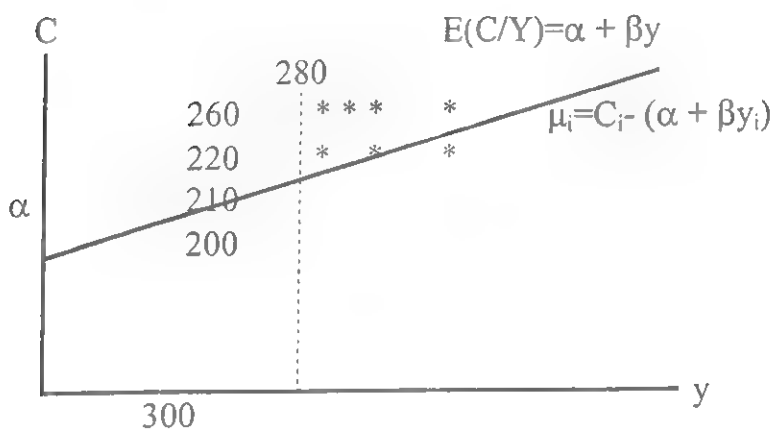
وهى تلك النماذج التى لا تفترض وجود علاقة تامة بين المتغيرات، وإنما نأخذ فى إعتبارها إدخال العنصر أو المتغير العشوائى فى العلاقة، وذلك للمتغير عن المتغيرات الأخرى التى لم تتضمنها العلاقة، التغيرات العشوائية، أخطاء القياس .... الخ. وهذا النوع من النماذج هو ما نهتم بدراسته فى الإقتصاد القياسى. و النماذج غير الإحتمالية يمكن تحويلها إلى نماذج إحتمالية وذلك بإضافة المتغير العشوائى إليها. مثال ذلك إذا أضفنا المتغير العشوائى إلى المعادلة رقم (2-20) تتحول إلى العلاقة القياسية أو النموذج الإحتمالى كما يلى:

$$C_i = \alpha + \beta Y_i + \mu_i \dots\dots\dots (20-2)$$

فى هذه الحالة لا يوجد خط مستقيم يوضح العلاقة بين C , Y كما فى الشكل رقم (2, 2)، ولكن يوجد شكل انتشار يضم جميع النقاط الممكنة الداخلة فى العينة، حيث لا تقع جميع النقاط على الخط المستقيم. كذلك عند أى مستوى من مستويات الدخل نجد قيم مختلفة للإستهلاك، فعندما يكون الدخل 300 جنيه مثلاً، فإننا نجد تفاوتاً فى الإستهلاك بين الأسر المختلفة فى العينة، فقد تتفق أسرة 200 جنيه فقط على الإستهلاك، فى حين تتفق الأخرى 220، وثالثة 260، ورابعة 280 .... الخ. ويوضح ذلك الشكل رقم (2-3).

### شكل رقم (3-2)

شكل انتشار للعلاقة بين الإستهلاك الكلى والدخل الممكن التصرف فيه



واختلاف القيم بين الأسر المختلفة يرجع إلى المتغير العشوائى،  
والذى يقدر بمجموع مربعات البواقي، أى الفرق بين  $C_i$  المشاهدة  
و  $E(C/Y) = \alpha + \beta Y_i$  المقدرة، معنى ذلك أن هذه القيمة  $\mu$  غير معروفة مسبقاً  
وإن كان تقديرها احصائياً. ونظراً لعدم إمكان ملاحظة  $\mu$  أو قياسها فإننا نقوم  
بعمل افتراضات خاصة بقيمتها وتوزيعها التكرارى أو الإحتمالى، أى بواسطتها  
الحسابى والتباين الخاص بها وتغايرها، وتمثل هذه الافتراضات والنتائج  
المرتتبة على تحقيقها أو عدم تحقيقها أهمية خاصة فى دراسة الاقتصاد  
القياسى كما سيأتى فى الفصول القادمة.

وهذا ويمكن تقسيم النماذج الإقتصادية وفقا لعنصر الزمن إلى نوعين من النماذج:-

### 1. نماذج ساكنة Static Models

وتعرف بأنها تلك النماذج التى لا تأخذ فى اعتبارها عنصر الزمن، ومن ثم تظهر فى لحظة معينة. أو تقارن بين وضعين فى فترات زمنية مختلفة. مثل النموذج الساكن المقارن، الذى يصف حالتى توازن كل منهما تعبر عن وضع ساكن، ولكنه لا يبين لنا أثر الزمن على النموذج، كما لا يبين لنا كيف تم الانتقال من وضع توازن معين إلى وضع توازن آخر.

### 2. النماذج الحركية Dynamic Models

وتعرف بأنها تلك النماذج التى يظهر أثر الزمن فيها بصورة واضحة، ومن أهم هذه النماذج، النموذج العنكبوتى لتوازن السوق لسلعة ما Cobweb Models وخاصة السلع الزراعية.

ويجب الملاحظة أنه تم الإشارة فقط إلى تقسيم النماذج الإقتصادية وفقا لعنصر الزمن دون تفصيل، لأن دراسة هذا التقسيم تكون فى منهج الإقتصاد الرياضى بشكل أفضل، وأكثر تفصيلا.

## الفصل الثالث

### نموذج الانحدار الخطي البسيط

#### Simple Linear Regression Model



### \_\_\_\_\_ الفصل الثالث \_\_\_\_\_ نموذج الانحدار الخطى البسيط

ذكرنا فى الفصل الأول من هذا الكتاب، أن الخطوة الثانية بعد توصيف النموذج الإقتصادى، هى تقدير معالم النموذج، وفى هذا الفصل سوف نتعرف على طرق تقدير معالم النموذج الخطى البسيط. ويعتبر النموذج الخطى لمتغيرين، هو أبسط أنواع نماذج الانحدار المختلفة، إذ يقتصر على وصف علاقة خطية عشوائية تربط بين متغيرين فقط، أحدهما تابع والآخر مستقل. وتشكل دراسة هذا النموذج القاعدة الأساسية ونقطة الإنطلاق نحو دراسة نماذج أكثر عمومية وواقعية.

#### 1/3. صياغة نموذج خطى لمتغيرين (نموذج خطى بسيط).

يعتبر النموذج الخطى لمتغيرين الأكثر بساطة والأسهل للتقدير والتحليل الإحصائى والإقتصادى من بين النماذج المختلفة. حيث لا يضم إلا متغيرين ضمن معادلة واحدة، أحدهما تابع  $Y$ ، والآخر مستقل (تفسيرى)  $X$ . وتأخذ العلاقة الحقيقية للدالة فى المجتمع الشكل التالى:-

$$\left. \begin{array}{l} Y = F(X) + \mu \dots\dots\dots \\ \text{أو} \\ Y = \alpha + \beta X + \mu \dots\dots\dots \end{array} \right\} (1-3)$$

حيث أن:-

$Y$  متغير تابع

$X$  متغير مستقل (تفسيرى)

$\mu$  الخطأ العشوائى

والنموذج رقم (1-3) بمتغيراته له الخصائص التالية:-

### 1- بالنسبة للخطأ العشوائى $(\mu)$ :

المتغير العشوائى له افروض التالية:-

1- توقع الخطأ العشوائى بصفر

$$E(\mu) = 0$$

2- تباين ثابت ومتجانس فى كل فترة ولكل قيم  $X$ .

$$V(\mu) = E(\mu - E(\mu))^2 = E(\mu)^2 = \sigma_\mu^2$$

3- التباين بصفر

$$\text{Cov}(\mu_i, \mu_j) = E(\mu_i \mu_j) = 0 \quad i \neq j$$

وهذا يعنى عدم وجود ارتباط ذاتى بين مشاهدات الخطأ العشوائى. أى  
فرض الإستقلالية.

بد تضاف الفروض التالية:

### 1- المتغير المستقل $X$

يأخذ قيم ثابتة فى المشاهدات المتكررة، ومن ثم يكون  $X$  ،  $\mu$  غير  
مرتبطة. أى أن:

$$\text{Cov}(X, \mu) = E(x\mu) = XE(\mu) = 0$$

### 2- التوزيع الطبيعى

نفترض أن المتغير العشوائى له توزيع طبيعى، وكنيجة لهذا الفرض  
فإن  $Y$  وتوزيع معالم الانحدار المقدرة تتبع أيضا التوزيع الطبيعى. ويتيح هذا  
الفرض القيام باختيارات المعنوية لمعاملات النموذج، غير أنه ليس بالفرض  
الضرورى للوصول إلى تقديرات المعالم بطريقة المربعات الصغرى.

ويوضح المثال التالي هذه الفروض، فإذا كانت العينة المراد دراستها  
تحتوى على  $n$  من المشاهدات للمتغيرين  $X, Y$  مع الخطأ العشوائى، أى أن:

$$X_1, X_2, X_3, \dots, X_n$$

$$Y_1, Y_2, Y_3, \dots, Y_n$$

تصبح المعادلة رقم (1-3) كما يلى:

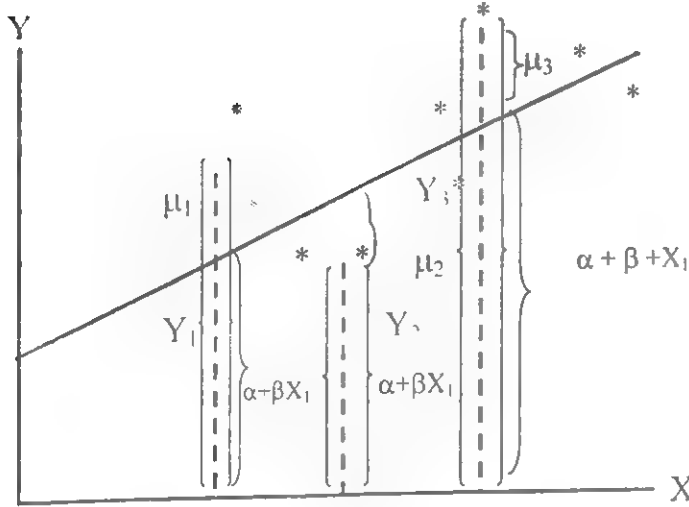
$$Y_i = \alpha + \beta y_i + \mu_i \dots \dots \dots (2-3)$$

ومن الناحية العلمية يمكننا تصوير المشاهدات الإحصائية للمتغيرين  
 $X, Y$  فى شكل انتشار كما يوضح الشكل رقم (1-3).



شكل رقم (1-3)

شكل انتشار للعلاقة (2-3)



وفى الواقع فإن الخط  $\alpha + \beta X$  مجهول الموقع، وذلك لإعتماده على المعالم المجهولة  $\alpha$  ،  $\beta$  ، لكن يمكن تقديره تحت الإفتراضات التالية:-

$$Y_i = \alpha + \beta X_i + \mu_i$$

$$E(\mu_i) = 0$$

$$E(\mu_i \mu_j) = 0, \quad i \neq j \quad i, j = 1, 2, \dots, n$$

$$E(\mu_i)^2 = \sigma^2 \mu, \quad i = j$$

ويمكن إضافة الفروض التالية:-

$X_i$  ثابت فى المشاهدات المتكررة ومستقل عن الخطأ العشوائى.  
 $\mu_i$  له توزيع طبيعى.

وكثيرا ما يتم وضع الفروض السابقة في الصورة التالية:-

$$Y_i = \alpha + \beta X_i + \mu_i$$

$$\mu_i \sim N(0, \sigma^2 \mu)$$

وتعنى الصورة  $\mu_i \sim N(0, \sigma^2 \mu)$  أن النموذج له التوزيع الطبيعي، وللتغير العشوائى توقعه بصفر (وسطه الحسابى) وتباينه ثابت ويساوى  $\sigma^2 \mu$ ، وأن  $\alpha$ ،  $\beta$ ،  $\sigma^2 \mu$  معلمات مجهولة القيم للمجتمع، ويمكن تقديرهم إحصائيا من خلال مشاهدات العينة الخاصة بالمتغيرين  $X$ ،  $Y$ . كما يمكن إجراء اختبارات الفروض والمعنوية على هذه المعلمات كما سيأتى فيما بعد. وكلما اقترب تقدير المعلمات  $\hat{\alpha}$ ،  $\hat{\beta}$  من المعلمات الحقيقية، أدى ذلك إلى انخفاض مجموع مربعات البواقي  $\sum (Y_i - \bar{Y})^2$ ، التى تعتبر تقدير للخطأ العشوائى، ارتفعت جودة النموذج المقدر من العينة، ويعتمد ذلك على عوامل كثيرة أهمها طريقة التقدير الإحصائى، وهذا ما سيتم مناقشته فى الجزء التالى.

### 2/3. طريقة التقدير الإحصائى

تعتبر طريقة المربعات الصغرى أسلوب لتوفيق أفضل خط مستقيم لعينة من المشاهدات الخاصة بالمتغيرين  $X$ ،  $Y$ . وقدم هذه الطريقة عالم الرياضيات الألمانى كارل فريدريك جاوس، وذلك لتقدير معلمات النموذج المجهولة  $\alpha$ ،  $\beta$ ،  $\sigma^2 \mu$ . وتتميز طريقة المربعات الصغرى بسهولة النسبية، كما أنها تقود إلى تقديرات ذات خصائص إحصائية جيدة ومرغوبة.

ويمكن عرض هذه الطريقة من خلال افتراض النموذج رقم (3-3) السابق كما يلي:

$$Y_i = \alpha + \beta X_i + \mu_i$$

$$\mu_i \sim N(0, \sigma^2 \mu)$$

ونرمز إلى مشاهدات العينة كما يلي:

$$(X_i, Y_i), i = 1, 2, \dots, n$$

$$E(Y_i) = \alpha + \beta X_i$$

ويوضح الشكل رقم (3-3) خط الانحدار الحقيقي والخاص بالمجتمع  $E(Y_i) = \alpha + \beta X_i$  والذي يعتبر مجهول المكان والشكل. وتحاول طريقة المربعات الصغرى تقدير هذا الخط من خلال العينة أى الوصول إلى قيم للمعاملات  $\hat{\alpha}$ ,  $\hat{\beta}$  ويرمز لهذا الخط بـ

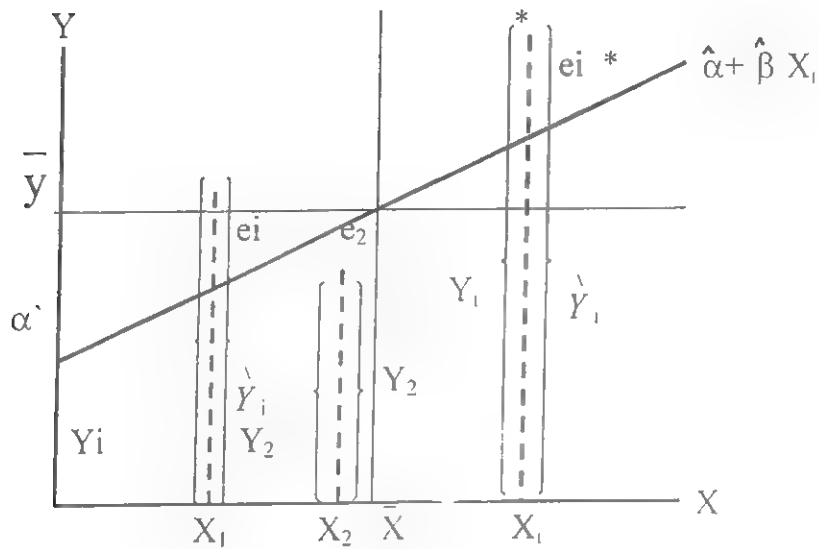
$$\hat{Y}_i = \hat{\alpha} + \hat{\beta} X_i$$

حيث أن:

$\hat{Y}_i$	قيمة مقدرة للمشاهدة الفعلية $Y_i$
$\hat{\alpha}$	تقدير للمعلمة الحقيقية المجهولة $\alpha$
$\hat{\beta}$	تقدير للمعلمة الحقيقية المجهولة $\beta$

شكل رقم (3-3)

العدد  $\hat{\alpha} + \hat{\beta} X$  المستند



من الشكل رقم (3-3) يمكن تعريف البواقي Residuals والتي نرمز لها بالرمز  $e_i$  كما يلي:

البواقي = القيم الحقيقية للملاحظة  $Y_i$  - القيم المقدرة للملاحظة  $\hat{Y}_i$  أو

$$e_i = Y_i - \hat{Y}_i$$

\_\_\_\_\_ الفصل الثالث \_\_\_\_\_ نموذج الإحداد الخطى البسيط

ويمكن للبواقي أن تكون سالبة أو موجبة وفقا لموضع نقطة المشاهدة من الخط المقدر. هذا وتعطى طريقة المربعات الصغرى العادية أفضل خط مستقيم يوفق مشاهدات العينة  $(X, Y)$ ، لأنها تعطي أقل مجموع مربعات رأسية لإنحرافات كل مشاهدة عن الخط المستقيم المقدر  $\hat{\alpha} + \hat{\beta} X_i$  كما فى الشكل (3-3).

ونوضح ذلك كما يلي:

$$\sum_{i=1}^n e_i^2 \dots\dots\dots (4-3)$$

وبما أن

$$\begin{aligned} \sum_i e_i^2 &= \sum_i (Y_i - \hat{Y}_i)^2 \\ &= \sum_{i=1}^n (Y_i - \hat{\alpha} - \hat{\beta} X_i)^2 \end{aligned}$$

ونفاضل  $e_i$  بالنسبة لكل من  $\hat{\alpha}$  ،  $\hat{\beta}$  ومساوته بالصفر وذلك للوصول إلى نهاية صغرى لـ  $e_i$ .

$$\frac{\partial \left[ \sum_i e_i^2 \right]}{\partial \hat{\alpha}} = -2 \sum_{i=1}^n (Y_i - \hat{\alpha} - \hat{\beta} X_i) = 0 \dots\dots\dots (5-3)$$

$$\frac{\partial \left[ \sum_{i=1}^n e_i^2 \right]}{\partial \hat{\beta}} = -2 \sum_{i=1}^n X_i (Y_i - \hat{\alpha} - \hat{\beta} X_i) = 0 \dots\dots\dots (6-3)$$

وإذا تم تبسيط المعادلتين رقم (5-3)، (6-3) نحصل على المعادلات

الطبيعية الخاصة بـ  $\hat{\alpha}$  ،  $\hat{\beta}$  للخط المستقيم كما يلي:-

$$\sum_{i=1}^n Y_i = n\hat{\alpha} + \hat{\beta} \sum_{i=1}^n X_i \dots\dots\dots (7-3)$$

$$\sum_{i=1}^n Y_i X_i = \hat{\alpha} \sum_{i=1}^n X_i + \hat{\beta} \sum_{i=1}^n X_i^2 \dots\dots\dots (8-3)$$

$$\hat{\beta} = \frac{n \sum_{i=1}^n X_i Y_i - \left[ \sum_{i=1}^n X_i \sum_{i=1}^n Y_i \right]}{n \sum_{i=1}^n X_i^2 - \left[ \sum_{i=1}^n X_i \right]^2} \dots\dots\dots (9-3)$$

هذا ويكون لدينا (7-3)، (8-3) أنيتين في مجهولين هما  $\hat{\alpha}$  ،  $\hat{\beta}$  ،

ويجرى حلهم أنيا لنحصل على كل من  $\hat{\alpha}$  ،  $\hat{\beta}$  كما يلي:

$$\hat{\beta} = \frac{n \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})(Y_i - \bar{Y})}{n \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2} \dots\dots\dots (10-3)$$

ملاحظات

1- مجموع الثابت = عدد المشاهدات مضروب في الثابت

$$\sum_{i=1}^n \hat{\alpha} = n\hat{\alpha}$$

2- مجموع الثابت في المتغير = الثابت في مجموع المتغير

$$\sum_{i=1}^n \hat{\beta} X_i = \hat{\beta} \sum_{i=1}^n X_i$$

3- مجموع المتغير فى متغير = مجموع المتغير تربيع

$$\sum_{i=1}^n X_i Y_i = \sum_{i=1}^n X_i^2$$

وتعطى الصيغة رقم (10-3) المقدرة بطريقة المربعات الصغرى.

$$\alpha' = \frac{\sum_{i=1}^n X_i^2 \sum_{i=1}^n Y_i - \sum_{i=1}^n X_i \sum_{i=1}^n X_i Y_i}{n \sum_{i=1}^n X_i^2 - \left( \sum_{i=1}^n X_i \right)^2}$$

$$\hat{\alpha} = \bar{y} - \hat{\beta} \bar{X} \quad (12-3)$$

وتعطى الصيغة رقم (12-3) المقدرة بطريقة المربعات الصغرى.

ونلاحظ ما يلى على تقديرات المربعات الصغرى لـ  $\hat{\alpha}$  ،  $\hat{\beta}$  :-

1- يتم التوصل إليهم من قيم مشاهدات العينة.

2- تعتبر تقديرات لنقطة، بمعنى أنها تعطى تقديرات مفردة لمعلمة المجتمع المجهولة.

هذا، وعندما نحصل على تقديرات المربعات الصغرى فإنه يمكننا

تحديد خط الانحدار المقدر فى الشكل رقم (3-3) والخاص بالعينة، حيث يعطى المعادلة التالية:

$$\left. \begin{aligned} \hat{Y} &= \hat{\alpha} + \hat{\beta} X \\ \hat{Y} &= \hat{\alpha} + \hat{\beta} X + e \end{aligned} \right\} \quad (13-3)$$

ويلتحظ أن e ترمز إلى البواقي وهو تقدير للخطأ العشوائى.

\_\_\_\_\_ الفصل الثالث \_\_\_\_\_ نموذج الإنحدار الخطى البسيط

وهناك مجموع من الخواص الحسابية والإحصائية الجيدة لطريقة المربعات الصغرى عند تقديرها للمعلمات  $\hat{\alpha}$  ،  $\hat{\beta}$  ،  $e$  ويمكن عرضها كما يلي:-

### 3/2/1. الخصائص الحسابية لطريقة المربعات الصغرى:

1- يمر الخط المقدر من نقطة متوسطات العينة للمتغيرات  $Y$  ،  $X$  ، ويتضح ذلك من:

أ- المعادلة رقم (3-12) والتي يمكن كتابتها على النحو التالي:

$$\hat{Y} = \hat{\alpha} + \hat{\beta}X$$

ب- الشكل رقم (3-3) حيث تعتبر  $\bar{y}$  ،  $\bar{X}$  إحداثيات المتوسطات.

2- القيمة المتوسطة  $Y$  لقيم  $y$  المقدرة (أي  $\hat{Y}$ ) تساوى القيمة المتوسطة  $y$  الفعلية (أي حيث أن:-

$$\hat{Y} = \hat{\alpha} + \hat{\beta} = (\bar{y} - \hat{\beta} \bar{X}) + \hat{\beta} \bar{X} = \bar{y}$$

$$\hat{\alpha} = \bar{Y} - \hat{\beta} \bar{X}$$

حيث أن

3- مجموع البواقي يساوى الصفر.

$$\sum_{i=1}^n e_i = 0$$

$$e_i = y_i - \hat{Y}_i$$

بما أن

$$\therefore e_i = y_i - \hat{\alpha} - \hat{\beta}X$$



ويجمع القيم:

$$\sum_{i=1}^n e_i = \sum_{i=1}^n (y_i - \hat{\alpha} - \hat{\beta} X_i) = 0$$

وإذا كان مجموع البواقي يساوى صفر فإن القيمة المتوسطة للبواقي تساوى الصفر أيضا:

$$\bar{e} = 0$$

-4 لا ترتبط البواقي  $e_i$  بالمتغير  $X_i$  أى أن:

$$\sum_{i=1}^n X_i e_i = 0$$

ونحصل على هذه النتيجة من المعادلة الطبيعية رقم (3-6) كما يلي:

$$\sum_{i=1}^n x_i (y_i - \hat{\alpha} - \hat{\beta} X_i) = 0$$

$$\sum_{i=1}^n X_i e_i = 0$$

-5 لا ترتبط البواقي بالقيمة المقدرة  $\hat{Y}_i$  كما يلي:

$$\sum_{i=1}^n \hat{Y}_i e_i = \sum_{i=1}^n \hat{Y}_i e_i = 0$$

حيث أن:

$$y_i = Y_i - \bar{Y}$$

$$\sum_{i=1}^n y_i = 0$$

### 2/2/3 الخصائص الإحصائية لطريقة المربعات الصغرى:

تتميز تقديرات المعلمات بطريقة المربعات الصغرى العادية بالخصائص الإحصائية الجيدة- كما سبق عرضها في الفصل الأول- كما يلي:-

#### 1- الخطية:

كما سبق وأن عرفنا أن التقدير الخطى هو أفضل أنواع التقديرات، وتقديرات المربعات الصغرى العادية خطية في المتغير التابع  $y$ ، أى أن تقديرات المربعات الصغرى يمكن وصفها فى صورة دالة خطية.

أ- المعلمة  $\hat{\beta}$ .

$$\hat{\beta} = \frac{\sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})(Y_i - \bar{Y})}{\sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2}$$

وللتسهيل بفرض أن

$$x_i = X_i - \bar{X}$$

$$y_i = Y_i - \bar{Y}$$

وكذلك

$$\sum_{i=1}^n x_i = \sum_{i=1}^n y_i = 0$$

$$\hat{\beta} = \frac{\sum_{i=1}^n x_i y_i}{\sum_{i=1}^n x_i^2} \quad \therefore$$

أى أن:

$$\hat{\beta} = \frac{\sum_{i=1}^n x_i y_i}{\sum_{i=1}^n x_i^2} = \frac{\sum_{i=1}^n x_i (Y_i - \bar{Y})}{\sum_{i=1}^n x_i^2} = \frac{\sum_{i=1}^n x_i Y_i - \bar{Y} \sum_{i=1}^n x_i}{\sum_{i=1}^n x_i^2} = \frac{\sum_{i=1}^n x_i Y_i}{\sum_{i=1}^n x_i^2}$$

$$\sum_{i=1}^n x_i = 0$$

حيث أن:

ويمكن كتابة  $\hat{\beta}$

$$\hat{\beta} = \sum_{i=1}^n K_i Y_i \dots \dots \dots (14-3)$$

وتشير المعادلة رقم (14-3) إلى أن  $\hat{\beta}$  مجموع مرجح لقيم المتغير التابع  $Y_i$  ، حيث تعرف الترجيحات أو الأوزان  $K_i$ :-

$$K_i = \frac{x_i}{\sum_{i=1}^n x_i^2}$$

وإذا عرفنا أن الأوزان تعتمد على انحرافات قيم  $X_i$  الثابتة عن وسطها الحسابي  $\bar{X}$  فإنها تعتبر ثابتة في المشاهدات المتكررة أيضا، يلاحظ الآتي:-

$$\sum_{i=1}^n K_i = \sum_{i=1}^n \left[ \frac{x_i}{\sum_{i=1}^n x_i^2} \right] = \frac{\sum_{i=1}^n x_i}{\sum_{i=1}^n x_i^2} = \frac{0}{\sum_{i=1}^n x_i^2} = 0$$

ب- مجموع مربعات الأوزان يساوى معكوس مجموع مربعات انحرافات  $X_i$  عن وسطها الحسابي  $\bar{X}$  .

$$\sum_{i=1}^n K_i^2 = \sum_{i=1}^n \left[ \frac{x_i}{\sum_{i=1}^n x_i^2} \right]^2 = \frac{1}{\sum_{i=1}^n x_i^2}$$

\_\_\_\_\_ الفصل الثالث \_\_\_\_\_ نموذج الإحداد الخطى البسيط

ج- مجموع مضروب الأوزان في قيم المتغير المستقل (أو إنحرافاته) يساوى الواحد الصحيح.

$$\sum_{i=1}^n K_i x_i = \sum_{i=1}^n K_i (Y - \bar{X}) = \sum_{i=1}^n K_i Y_i - \bar{X} \sum_{i=1}^n K_i = \sum_{i=1}^n K_i Y_i$$

كما أن

$$\sum_{i=1}^n K_i x_i = \sum_{i=1}^n \left[ \frac{x_i}{\sum_{i=1}^n x_i} \right] x_i = \frac{\sum_{i=1}^n x_i^2}{\sum_{i=1}^n x_i} = 1$$

ب- المعلمة  $\hat{\alpha}$

$$\begin{aligned} \hat{\alpha} &= \bar{Y} - \hat{\beta} \bar{X} \\ &= \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n Y_i - \left( \sum_{i=1}^n K_i y_i \right) \cdot \bar{X} \end{aligned}$$

حيث أن

$$\hat{\beta} = \sum_{i=1}^n K_i y_i$$

كما في المعادلة رقم (3-14).

معنى ذلك أن:

$$\hat{\alpha} = \sum_{i=1}^n \left( \frac{1}{n} - K_i \bar{X} \right) Y_i = \sum w_i Y_i$$

حيث أن:

$$w_i = \frac{1}{n} - K_i \bar{X}$$

وبما أن القوس يحتوى على ثوابت في المشاهدات المتكررة، فإن  $w_i$  أوزان ثابتة في الملاحظة المتكررة. وعليه فإن  $\hat{\alpha}$  تعتبر دالة خطية في قيم  $Y$ .

وبما أن قيم  $Y$  عشوائية لإعتمادها على المتغير العشوائى  $\mu_i$ ، فإن  $\hat{\alpha}$ ،  $\hat{\beta}$  تعتبر عشوائية لإعتمادها على  $Y$ ، ومن ثم تمتلكان توزيعى معاينة خاصين بهما، ينبغى وضعهما وتحديدهما، وذلك بتحديد معالم التوزيعين من وسط وتباين وتغاير، وسوف نتعرض إلى هذه المعالم من خلال التعرض لخواص عدم التحيز والكفاءة.

## 2. عدم التحيز

سبق وأن عرفنا عدم التحيز فى الفصل الأول، حيث يعتبر التقدير غير متحيز إذا كان وسطه الحسابى يساوى القيمة الحقيقية للمعلمة. أى أن  $E(\hat{\theta}) = \theta$ .

$$\hat{\beta} = \sum_{i=1}^n k_i y_i = \sum_{i=1}^n k_i (\alpha + \beta X_i + \mu_i)$$

حيث أن

أ. المعلمة  $\hat{\beta}$ .

$$Y_i = \alpha + \beta + u_i$$

$$\hat{\beta} = \alpha \sum_1^n K_i + \beta \sum_1^n K X_i + \alpha \sum_1^n K_i \mu_i$$

بما أن

$$\sum_{i=1}^n K_i = 0$$

∴

$$\hat{\beta} = \beta + \sum_1^n K_i \mu_i \dots \dots \dots (15-3)$$

وبإحد توقع الطرفين، كم سبق ذكره

$$E(\hat{\beta}) = E \left[ \beta + \sum_1^n K_i \mu_i \right]$$

$$E(\hat{\beta}) = \left[ \beta + \sum_{i=1}^n K_i E(\mu_i) \right]$$

من خصائص الخطأ العشوائى توقعه يساوى صفر ، فإن

$$E(\hat{\beta}) = \beta$$

معنى أن المعلمة  $\hat{\beta}$  تعتبر تقدير غير متحيز للمعلمة الحقيقية  $\beta$ .

المعلمة  $\alpha$ .

$$\hat{\alpha} = \bar{Y} + \hat{\beta} \bar{X}$$

$$= \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n Y_i + \left[ \sum_{i=1}^n K_i X_i \right] \bar{X}$$

$$\alpha = \sum_{i=1}^n \left( \frac{1}{n} - K_i \bar{X} \right) Y_i$$

$$= \sum_{i=1}^n \left( \frac{1}{n} - K_i \bar{X} \right) (\alpha + \beta X_i + u_i)$$

$$= \alpha - \alpha \bar{X} \sum K_i + \beta \bar{X} - \beta \bar{X} \sum K_i X_i +$$

$$= \sum_{i=1}^n \left( \frac{1}{n} - K_i \bar{X} \right) U_i$$

• مجموع الثابت = عدد المشاهدات × الثابت

$$\sum_{i=1}^n \alpha = n\alpha$$

• ثابت مضروب فى مجموع متغير على عدد المشاهدات = الثابت × الوسط الحسابى للمتغير

$$\beta \sum_{i=1}^n X_i \cdot \frac{1}{n} = \beta \bar{X}$$

$$= \alpha + \sum_{i=1}^n \left( \frac{1}{n} - K_i X \right) u_i \dots \dots \dots (16-3)$$

و على اعتبار أن خاصية عدم التحيز هي  $E(u) = 0$

فإن

$$E(\hat{\alpha}) = \alpha + \sum_{i=1}^n \left( \frac{1}{n} - K_i X \right) E(u_i) \dots \dots \dots (16-3)$$

$$E(\hat{\alpha}) = \alpha \quad \therefore$$

معنى ذلك أن تقدير المعلمة  $\hat{\alpha}$  هو تقدير غير متحيز للمعلمة الحقيقية  $\alpha$ .

### 3. الكفاءة Efficiency

نعنى بالكفاءة أن طريقة المربعات الصغرى لها أقل تباين ممكن من بين طرق التقدير الأخرى، التى قد تكون أيضا غير متحيزة، وقد قدم الرياضى الروسى جاوس ماركوف نظرية أثبتت فيها أن طريقة المربعات الصغرى أفضل طرق التقدير لأنها الوحيدة من بين كل هذه التقديرات التى تتمتع بالكفاءة.

#### نظرية جاوس ماركوف:

تنص النظرية على أن طريقة المربعات الصغرى العادية هي أفضل تقدير غير خطى غير متحيز.

ويمكن شرح نظرية جاوس ماركوف من خلال:-

- أ- الحصول على تباين المعلمات  $\hat{\alpha}$  ،  $\hat{\beta}$  بطريقة المربعات الصغرى.
- ب- افتراض تقدير آخر غير متحيز ثم نحصل على تباين معلمات هذا التقدير .

ج- نقارن بين تباين تقديرات المربعات الصغرى للمعلمات، وتباين نفس المعلمات بالطريقة الأخرى، من ثم إصدار حكم الكفاءة لأيهما.

أ. تباين المعلمات  $\hat{\alpha}$  ،  $\hat{\beta}$  المقدرة بطريقة المربعات الصغرى.

يعرف التباين بأنه مربع الفرق بين المعلمة المقدرة ووسطها الحسابي (توقعها)، ويمكن عرض صيغة التباين بشكل عام كما يلي:

$$Var(\hat{\theta}) = E\left[\hat{\theta} - E(\hat{\theta})\right]^2 = E\left[(\theta - \theta)\right]^2 \dots\dots\dots (17-3)$$

وبتطبيق الصيغة رقم (17-3) على المعلمات  $\hat{\alpha}$  ،  $\hat{\beta}$  والمقدرة بطريقة المربعات الصغرى، نحصل على تباين كل معلمة.

أولاً: المعلمة  $\hat{\beta}$ .

تباينها:-

$$Var(\hat{\beta}) = E\left[\hat{\beta} - E(\hat{\beta})\right]^2 = E\left[\hat{\beta} - \beta\right]^2 \dots\dots\dots (17-3)$$

ومن الصيغة رقم (15-3) نجد أن:-

$$\hat{\beta} = \beta + \sum_{i=1}^n K_i \mu_i$$

$$\hat{\beta} - \beta = \sum_{i=1}^n K_i \mu_i$$

بما أن

$$Var(\hat{\beta}) = E\left[\hat{\beta} - \beta\right]^2$$

$$Var(\hat{\beta}) = E\left[\sum_i K_i \mu_i\right]^2$$



$$Var(\beta') = \sum_i K_i^2 E(U_i^2) + 2 \sum_i \sum_j K_{ij} E(u_i u_j) \quad \therefore$$

وبأخذ الفرضين التاليين فى الاعتبار :-

$$E(\mu_i^2) = \sigma^2$$

$$E(\mu_i \mu_j) = 0$$

وكذلك الصيغة :-

$$\sum_{i=1}^n K_i^2 = \frac{1}{\sum x_i^2}$$

فإن :-

$$Var(\hat{\beta}) = \sigma^2 \sum_i K_i^2$$

معنى ذلك أن تباين المعلمة  $\hat{\beta}$  :-

$$Var(\hat{\beta}) = \sigma^2 \cdot \frac{1}{\sum_{i=1}^n x_i^2} \dots \dots \dots (18-3)$$

والخطأ المعياري للمعلمة  $\beta'$ ، هو الذى يعرف بأنه الجذر التربيعى

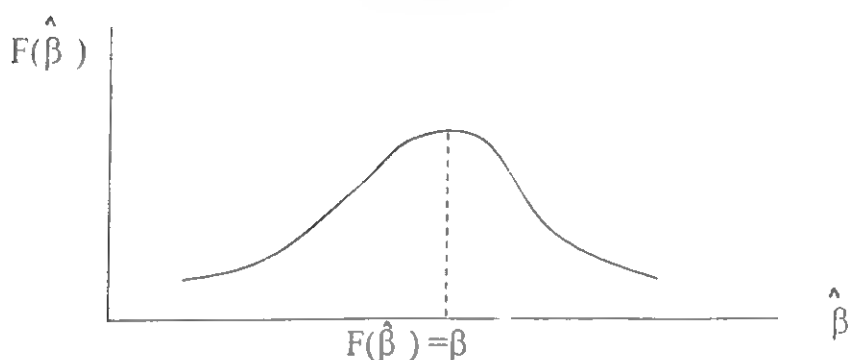
لتباينها هو :

$$S.E(\beta') = \sigma \cdot \frac{1}{\sqrt{\sum_{i=1}^n x_i^2}} \dots \dots \dots (19-3)$$

وترجع أهمية الخطأ المعياري للتقدير إلى استخدامه فى إختبارات المعنوية الخاصة بعالم العلاقة الإقتصادية، لمعرفة أيا منها معنوى وأيها غير معنوى احصائيا، وكذلك فى تقدير فترات الثقة للمعلمات. ويلاحظ أن تباين المعلمة  $\hat{\beta}$ .

يعتمد طرديا على تباين الخطأ العشوائى، وعكسيا على القيمة  $\sum_{i=1}^n x_i^2$  والتي تقيس انتشار قيم المتغير المستقل (المفسر)  $X$ . من ثم يكون للمعلمة  $\beta^*$  توزيع المعاينة كما فى الشكل رقم (4-3).

شكل رقم (4-3)  
توزيع المعاينة للمعلمة  $\hat{\beta}^*$



والشكل رقم (4-3) هو التوزيع الطبيعى للمعلمة  $\hat{\beta}^*$ ، حيث أن المعلمة  $\hat{\beta}$  دالة خطية فى المتغير العشوائى  $u_i$  كما توضح الصيغة التالية:

$$\hat{\beta} = \beta + \sum_i K_i u_i$$

ومن ثم يكون للمقدرة  $\hat{\beta}$  توزيعاً طبيعياً بمتوسط يساوى القيمة المتوقعة لها وتباين كما هو محسوب فى المعادلة رقم (3-18)، أى أن

$$\hat{\beta}^* \sim N \left( \beta, \sigma^2 \frac{1}{\sum_{i=1}^n x_i^2} \right)$$

## ثانياً: المعلمة $\hat{\alpha}$

تباينها:-

$$Var(\hat{\alpha}) = E(\hat{\alpha} - E(\hat{\alpha}))^2$$

$$Var(\hat{\alpha}) = E(\hat{\alpha} - \alpha)^2$$

ومن ثم المعادلة رقم (3-16):

$$\hat{\alpha} = \alpha + \sum_{i=1}^n \left( \frac{1}{n} - K_i \bar{X} \right) u_i$$

$$Var(\hat{\alpha}) = E \left[ \sum_{i=1}^n \left( \frac{1}{n} - K_i \bar{X} \right) u_i \right]^2$$

$$Var(\hat{\alpha}) = \sigma^2 \sum_{i=1}^n \left( \frac{1}{n} - K_i \bar{X} \right)^2$$

$$Var(\hat{\alpha}) = \sigma^2 \left[ \frac{1}{n} + \bar{X}^2 \sum_{i=1}^n K_i^2 - 2 \frac{\bar{X}}{n} \sum_{i=1}^n K_i \right]$$

$$Var(\hat{\alpha}) = \sigma^2 \left[ \frac{1}{n} + \frac{\bar{X}^2}{\sum_{i=1}^n X_i^2} \right]$$

ويمكن كتابة الصيغة السابقة كما يلي:

$$Var(\hat{\alpha}) = \sigma^2 \cdot \frac{\sum_{i=1}^n X_i^2}{n \sum_{i=1}^n X_i^2} \dots \dots \dots (20-3)$$

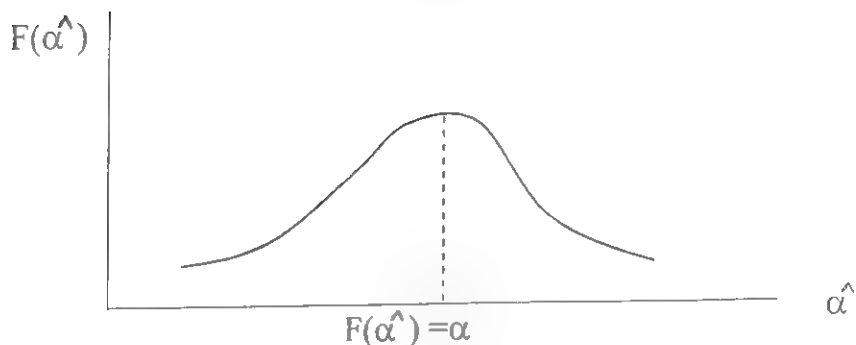
والخطأ المعياري للمعلمة  $\alpha^{\wedge}$ :

$$S.e.(\alpha^{\wedge}) = \sigma. \sqrt{\frac{\sum X_i^2}{2 \sum X_i^2}} \dots \dots \dots (21-3)$$

وبوضح الشكل رقم (5-3) توزيع المعينة للمعلمة  $\alpha^{\wedge}$ .

شكل رقم (5-3)

توزيع المعينة للمعلمة  $\alpha^{\wedge}$



وللمعلمة  $\alpha^{\wedge}$  توزيع طبيعي أيضاً، حيث أنها دالة خطية فى المتغير العشوائى وفقاً لطبيعة الصيغة التالية:

$$\alpha^{\wedge} = \alpha + \sum \left( \frac{1}{n} - K_i \bar{X} \right) u_i$$

ومن ثم يكون للمعلمة  $\alpha^{\wedge}$  متوسط يساوى توقعها، وتباين كما هو محسوب فى المعادلة رقم (20-3).

$$\hat{\alpha} \sim N\left(\alpha, \sigma^2 \cdot \frac{\sum_{i=1}^n X_i^2}{n \sum_{i=1}^n X_i^2}\right)$$

ب- افترض تقدير آخر غير متحيز للمعاملات  $\alpha$  ،  $\beta$ .

بفرض تقدير آخر - غير المربعات الصغرى- لمعاملات النموذج  $\alpha$  ،  $\beta$  كما يلي:

أولاً: المعلمة  $\beta$

بفرض التقدير التالي للمعلمة  $\beta$

$$\hat{\beta} = \sum_{i=1}^n C_i Y_i \dots \dots \dots (22-3)$$

حيث أن:

$$C_i = K_i + d_i$$

$$d_i \neq 0$$

علماً بأن  $d_i$  ثوابت مختارة بطريقة تحكمية، ويمكن وضع التقدير  $\hat{\beta}$

على الشكل التالي:-

$$\hat{\beta} = \sum_{i=1}^n C_i (\alpha + \beta X_i + u_i)$$

$$= \alpha \sum_{i=1}^n C_i + \beta \sum_{i=1}^n C_i X_i + \sum_{i=1}^n C_i u_i \dots \dots \dots (23-3)$$

يمكن اختيار مدى تحيز أو عدم تحيز المعلمة  $\hat{\beta}$  كما يلي:

فإذا كان

$$E(\hat{\beta}) = \beta$$

يكون التقدير غير متحيز .

فإذا كان: (1)

$$\sum_{i=1}^n ci = 0$$

أو

$$\sum_{i=1}^n Ki + \sum_{i=1}^n di = 0$$

$$\sum_{i=1}^n di = 0$$

فإن

$$\sum_{i=1}^n CiXi = 1 \quad (2)$$

و

$$\sum_{i=1}^n KiXi + \sum_{i=1}^n diXi = 1$$

أى أن

$$\sum_{i=1}^n diXi = 0$$

معنى ذلك أن di كوزن نسبى يجب أن يحقق شرطين

$$\sum_{i=1}^n di = 0 \dots\dots\dots (1)$$

$$\sum_{i=1}^n diXi = \sum_{i=1}^n diXi = 0 \dots\dots\dots (2)$$

وإذا رجعنا إلى التقدير  $\hat{\beta}$  كما فى الصيغة (23-3) التالية:-

$$\beta = \alpha \sum_{i=1}^n ci + \beta \sum_{i=1}^n CiXi + \sum_{i=1}^n Ciui$$

$$\beta' = \beta + \sum_{i=1}^n Ciui$$

بما أن

$$E(ui)=0$$

$$E(\hat{\beta}) = \beta \quad \therefore$$

معنى ذلك أن  $\hat{\beta}$  تقدير غير متحيز للمعلمة  $\beta$ .

ويمكن الحصول على تبين التقدير الخطي غير المتحيز للمعلمة  $\hat{\beta}$  من خلال الصيغة التالية:

$$Var(\hat{\beta}) = E[\hat{\beta} - E(\hat{\beta})]^2$$

$$Var(\hat{\beta}) = E[\hat{\beta} - \beta]^2$$

$$Var(\hat{\beta}) = E\left[\sum_{i=1}^n ciui\right]^2$$

$$Var(\hat{\beta}) = E\left[\sum_{i=1}^n ci^2 ui^2 + 2 \sum_{i < j}^n CiCjuiuj\right]$$

$$Var(\hat{\beta}) = \sigma^2 \sum_{i=1}^n C_i^2$$

$$Var(\hat{\beta}) = \sigma^2 \sum_{i=1}^n (Ki + di)^2$$

$$Var(\hat{\beta}) = \sigma^2 \left[ \sum_{i=1}^n Ki^2 + \sum_{i=1}^n di^2 + 2 \sum_{i=1}^n Kidi \right]$$

بما أن

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^n Kidi &= \sum_{i=1}^n \left( \frac{xi}{\sum_i xi^2} \right) di \\ &= \frac{\sum_i xidi}{\sum_{i=1}^n xi^2} = 0\end{aligned}$$

∴

$$Var(\hat{\beta}) = \sigma^2 \sum_{i=1}^n K_i^2 + \sigma^2 \sum_{i=1}^n d_i^2 \dots\dots\dots (24 - 3)$$

$$Var(\hat{\beta}^{\wedge\wedge}) = Var(\hat{\beta}) + \sigma^2 \sum_{i=1}^n d_i^2$$

حيث أن

$$Var(\hat{\beta}) = \sigma^2 \sum_{i=1}^n K_i^2$$

وعلى اعتبار أن

$$\sum_{i=1}^n d_i^2 > 0$$

حيث أن  $\sum d$  هي التى تساوى صفر وعلى ذلك:

$$Var(\hat{\beta}^{\wedge\wedge}) \geq Var(\hat{\beta})$$

ومن ثم فإن تقدير المربعات الصغرى والخاص بالمعلمة  $\hat{\beta}$  يتميز بأنه له أدنى تباين من بين كل التقديرات الخطية غير المتحيزة للمعلمة  $\beta$  وبالتالي يتمتع بالكفاءة.



### ثانياً: المعلمة $\alpha$

بفرض التقدير التالى للمعلمة  $\hat{\alpha}$ .

$$\hat{\alpha} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n Y_i - \left[ \sum_{i=1}^n C_i Y_i \right] \cdot X \dots\dots\dots (25-3)$$

يمكن اختيار مدى تحيز المعلمة  $\hat{\alpha}$  أو عدم تحيزها كما يلي:-

$$\hat{\alpha} = \sum_{i=1}^n \left[ \frac{1}{n} - C_i \bar{X} \right] \cdot \bar{y}$$

$$\hat{\alpha} = \sum_{i=1}^n Y \left( \frac{1}{n} - C_i \bar{X} \right) \left( \alpha + \beta \bar{x}_i + u_i \right)$$

$$\hat{\alpha} = \alpha - \alpha \bar{X} \sum_{i=1}^n c_i - \beta \bar{X} - \beta \bar{X} \sum_{i=1}^n C_i X_i$$

$$+ \sum_{i=1}^n \left( \frac{1}{n} - C_i \bar{X} \right) u_i$$

وعلى اعتبار أن:-

$$\sum_{i=1}^n C_i = 0$$

$$\sum_{i=1}^n C_i X_i = 1$$

$$\hat{\alpha} = \alpha + \sum_{i=1}^n \left( \frac{1}{n} - C_i \bar{X} \right) u_i \dots\dots\dots (26-3)$$

وإذا عرفنا أن المعلمة تكون غير متحيزة وفقا للصيغة التالية:

$$E(\theta') = \theta$$

∴

$$E(\hat{\alpha}) = \alpha + \sum_{i=1}^n \left( \frac{1}{n} - C_i X' \right) E(ui)$$

و على اعتبار أن

$$E(ui) = 0$$

∴

$$E(\hat{\alpha}) = \alpha$$

وهذا يعنى أن التقدير  $\hat{\alpha}$  هو تقدير غير متحيز للمعلمة الحقيقية  $\alpha$ .

ويمكن الحصول على تباين التقدير الخطي غير المتحيز للمعلمة  $\hat{\alpha}$  من خلال الصيغة التالية:-

$$\text{Var}(\hat{\alpha}) = E(\hat{\alpha} - E(\hat{\alpha}))^2$$

$$\text{Var}(\hat{\alpha}) = E(\hat{\alpha} - \alpha)^2$$

على اعتبار أن:

$$\hat{\alpha} = \alpha + \sum_{i=1}^n \left( \frac{1}{n} - C_i \bar{X} \right) ui$$

$$\text{Var}(\hat{\alpha}) = E \left[ \sum_{i=1}^n \left( \frac{1}{n} - C_i \bar{X} \right) ui \right]^2$$

$$\text{Var}(\hat{\alpha}) = \sigma^2 \sum_{i=1}^n \left( \frac{1}{n} - C_i \bar{X} \right)^2$$

$$Var(\hat{\alpha}) = \sigma^2 \left[ \frac{1}{n} + \bar{X}^2 \sum_{i=1}^n C_i^2 - 2 \frac{\bar{X}}{n} \sum_{i=1}^n C_i \right]$$

$$Var(\hat{\alpha}) = \sigma^2 \left[ \frac{1}{n} + \bar{X}^2 \sum_{i=1}^n C_i^2 \right]$$

$$Var(\hat{\alpha}) = \sigma^2 \left[ \frac{1}{n} + \bar{X}^2 \sum_{i=1}^n (K_i + d_i)^2 \right]$$

$$Var(\hat{\alpha}) = \sigma^2 \left[ \frac{1}{n} + \bar{X}^2 \left( \sum_{i=1}^n K_i^2 + \sum_{i=1}^n d_i^2 + 2 \sum_{i=1}^n K_i d_i \right) \right]$$

$$Var(\hat{\alpha}) = \sigma^2 \left[ \frac{1}{n} + \bar{X}^2 \sum_{i=1}^n K_i^2 + \bar{X}^2 \sum_{i=1}^n d_i^2 + 2 \bar{X} \sum_{i=1}^n K_i d_i \right]$$

وعلى اعتبار أن:-

$$\sum_{i=1}^n K_i^2 = \frac{1}{\sum_{i=1}^n x_i^2}$$

$$\sum_{i=1}^n K_i d_i = 0$$

$$Var(\hat{\alpha}) = \sigma^2 \left[ \frac{1}{n} + \frac{\bar{X}^2}{\sum_{i=1}^n x_i^2} + \bar{X}^2 \sum_{i=1}^n d_i^2 \right]$$

$$Var(\alpha') = \sigma^2 \left( \frac{1}{n} + \frac{\bar{X}^2}{n} \right) + \sigma^2 \left( X^2 \sum_{i=1}^n di^2 \right) \dots\dots\dots (27-3)$$

وحيث:

$$Var(\hat{\alpha}) = \sigma^2 \left( \frac{1}{n} + \frac{\bar{X}^2}{\sum_{i=1}^n xi^2} \right)$$

$$\sum_{i=1}^n di^2 > 0$$

$$Var(\hat{\alpha}) \geq Var(\hat{\alpha}')$$

معنى ذلك أن تقدير المربعات الصغرى والخاص بالمعلمة  $\alpha'$  يتميز بأن له أدنى تباين من بين كل التقديرات الخطية غير المتحيزة للمعلمة  $\alpha$ . وبالتالي يتمتع بالكفاءة.

نخلص من الجزء السابق أن تقديرات المربعات الصغرى العادية للمعاملات الحقيقية للمجتمع  $\alpha$ ،  $\beta$  هي أحسن تقدير خطي غير متحيز، كما ذكر جاوس ماركوف.

### 3/3 الاختبارات الإحصائية لتقديرات المربعات الصغرى

بعد إثبات أن تقديرات المربعات الصغرى العادية، هي أحسن تقدير خطي غير متحيز، من خلال نظرية جاوس ماركوف، نحاول في هذا الجزء من الفصل الثالث، إجراء اختبارات المعنوية الخاصة بالمعاملات  $\hat{\alpha}$ ،  $\hat{\beta}$ . لكن تبين هذه المعاملات يحتوى على معلمة مجهولة وهي  $\sigma^2$ ، والتي تمثل تباين

الخطأ العشوائي، وقد سبق وأن ذكرنا أن مجموع مربعات البواقي يمثل تقدير للخطأ العشوائي. ومن ثم فإن تباين البواقي يعتبر تقدير غير متحيز لتباين الخطأ العشوائي.

### 1/3/3. تباين البواقي تقدير غير متحيز لتباين الخطأ العشوائي:

بفرض الصيغة التالية:-

$$\sigma'^2 = \frac{\sum e_i^2}{n-2} \dots\dots\dots (28-3)$$

وعلى اعتبار أن صيغة عدم التحيز هي:-

$$E(\sigma'^2) = \sigma^2$$

ويمكن إثبات أن تقدير تباين البواقي  $\sigma'^2$  هو تقدير غير متحيز لتباين

الخطأ العشوائي كما يلي:-

$$Y_i = \alpha + \beta X_i + u_i \dots\dots\dots (29-3)$$

ومن ثم:-

$$\bar{Y} = \alpha + \beta \bar{X} + \bar{u} \dots\dots\dots (30-3)$$

وبإدخال الانحرافات

$$y_i = \beta x_i + (u_i - \bar{u}) \dots\dots\dots (31-3)$$

∴

$$e_i = y_i - \beta x_i \dots\dots\dots (32-3)$$

وبالتعويض من الصيغة رقم (31-3) في الصيغة رقم (32-3) نحصل

على الصيغة التالية:-

$$e_i = \hat{\beta} x_i + (u_i - \bar{u}) - \hat{\beta} x_i$$

$$= -(\hat{\beta} - \beta) x_i + (u_i - \bar{u}) \dots\dots\dots (33-3)$$

وبتربيع القيم وجمعها فى الصيغة رقم (33-3) نحصل على مجموع

مربعات البواقي كما يلى:-

$$\sum_{i=1}^n e_i^2 = (\hat{\beta} - \beta)^2 \sum_{i=1}^n x_i^2 + E \sum (u_i - \bar{u})^2 - 2(\hat{\beta} - \beta) \sum X_i (u_i - \bar{u}) \dots (34-3)$$

وبأخذ القيمة المتوقعة (34-3) نحصل على

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n e_i^2 &= (\hat{\beta} - \beta)^2 \sum_{i=1}^n x_i^2 + E \sum (u_i - \bar{u})^2 \\ &- 2E(\hat{\beta} - \beta) \sum_{i=1}^n X_i (u_i - \bar{u}) \dots\dots\dots (35-3) \end{aligned}$$

وعلى اعتبار الآتى:-

$$\sum_{i=1}^n x_i^2 E(\hat{\beta} - \beta)^2 = \sum_{i=1}^n x_i^2 \cdot \frac{\sigma^2}{\sum_{i=1}^n x_i^2} = \sigma_u^2 \dots\dots\dots (35-3) / 1$$

حيث أن:

$$\begin{aligned} E(\hat{\beta} - \beta)^2 &= \frac{1}{\sum_{i=1}^n x_i^2} \cdot \sigma_u^2 \\ E \sum_{i=1}^n (u_i - \bar{u})^2 &= E \left[ \sum_{i=1}^n u_i^2 - \frac{1}{n} \left( \sum_{i=1}^n u_i \right)^2 \right] \end{aligned}$$

حيث أن:

$$n \sum u_i = \sum u_i^2$$

كذلك توقع الخطأ العشوائى أى وسطه الحسابى بصفر، فإن

$$u \sum (ui - \bar{u})^2 = E \left[ \sum_{i=1}^n u_i^2 - \frac{1}{n} \left( \sum_{i=1}^n u_i \right)^2 \right] = (n-1) \sigma_u^2 \dots\dots (35-3)/2$$

$$E(\hat{\beta} - \beta) \sum_{i=1}^n xi(ui - \bar{u}) = E \left[ \frac{\sum_{i=1}^n u_i x_i}{\sum_{i=1}^n X_i^2} \left( \sum_{i=1}^n u_i x_i - \mu \sum_{i=1}^n x_i \right) \right]$$

$$E(\hat{\beta} - \beta) \sum_{i=1}^n xi(ui - \bar{u}) = E \left[ \frac{\sum_{i=1}^n u_i x_i}{\sum_{i=1}^n X_i^2} \right] = \sigma^2 \dots\dots\dots (35-3)/3$$

من الصيغ 1/(35-3) ، 2/(35-3) ، 3/(35-3) يمكن الحصول على  
الصيغة التالية:-

$$E \left( \sum_{i=1}^n e_i^2 \right) = \sigma_u^2 + (n-1) \sigma_u^2 - 2 \sigma_u^2 = (n-2) \sigma_u^2$$

وبالرجوع إلى الصيغة رقم (28-3):

$$\sigma_u^2 = \frac{\sum_{i=1}^n e_i^2}{n-2}$$

فإن القيمة المتوقعة

$$E(\hat{\sigma}^2) = \sigma_u^2$$

$$\sigma_u^2 = \frac{\sum_{i=1}^n e_i^2}{n-2} = \frac{(n-2) \sigma_u^2}{(n-2)} = \sigma_u^2 \dots\dots\dots (36-3)$$

معنى ذلك ان التقدير  $\sigma^2$  هو تقدير غير متحيز للمعلمة الحقيقية  $\sigma^2$ ، ومن ثم لو تم سحب عدد كبير من العينات التي تحتوى n من المشاهدات، وقدرنا من كل منها خط انحدار. يتم حساب البواقي المرتبطة بكل خط ثم حسنا التباين الخاص به وفقاً للصيغة رقم (3-28)، فإنه يكون لدينا عدد كبير من تقديرات تباين البواقي تتوزع حول وسط حسابى هو المعلمة الحقيقية  $\sigma^2$ .

### 2/3/3 اختبارات المعنوية:

قبل إجراء اختبارات المعنوية والفروض لابد من إدخال الفرض الخاص بتحديد توزيع المتغير العشوائى u على أنه التوزيع الطبيعى  $u_i \sim N(0, \sigma^2)$ . حيث أنه لم يتم استخدام ذلك الفرض حتى هذه المرحلة. وبما أن ui موزعة توزيع طبيعى، وان  $y_i, \alpha, \beta$  تعتمد على المتغير العشوائى ui، فيكون لهم أيضاً توزيع طبيعى على النحو التالى:-

$$u_i \sim N(0, \sigma^2) \dots\dots\dots (37-3)$$

$$y_i \sim N(\alpha + \beta X_i, \sigma_u^2) \dots\dots\dots (38-3)$$

$$\alpha \sim N\left(\alpha, \frac{\sum_{i=1}^n X_i^2}{n \sum_{i=1}^n x_i^2} \cdot \sigma_u^2\right) \dots\dots\dots (39-3)$$

$$\beta \sim N\left(\beta, \frac{\sigma_u^2}{n \sum_{i=1}^n x_i^2}\right) \dots\dots\dots (40-3)$$

ونبدأ من هذه الفروض لإجراء الاختبارات الإحصائية.



أولاً: الاختبارات الخاصة بالمعلمة  $\hat{\beta}$ .

يمكن استخدام الصيغة رقم (3-40) لتكون نقطة البداية لإجراء الاختبارات على المعلمة  $\hat{\beta}$ .

$$\hat{\beta} \sim N\left(\beta, \frac{\sigma_u^2}{n \sum_{i=1}^n X_i^2}\right)$$

وبفرض تعريف المتغير  $Z_1$  على أنه موزع توزيعاً طبيعياً معيارياً كما يلي:

$$Z_1 = \frac{\hat{\beta} - E(\hat{\beta})}{\hat{\sigma}(\hat{\beta})} = \frac{\hat{\beta} - \beta}{\frac{\sigma_u}{\sqrt{\sum_{i=1}^n X_i^2}}} = \frac{(\hat{\beta} - \beta) \sqrt{\sum_{i=1}^n X_i^2}}{\sigma_u} \sim (0,1) \dots (3-41)$$

كما أن المتغير  $V_1^2$  (التباين) يتبع  $q^2$  ،  $X^2$  بـ  $(n-2)$  درجات حرية وبصورة مستقلة عن توزيع  $Z_1$ .

$$V_1^2 = \frac{\sum_{i=1}^n e_i^2}{\sigma_u^2} = \frac{(n-2)\sigma_u^2}{\sigma_u^2} \sim X^2(n-2) \dots (3-42)$$

وبالتالي فإن  $t$  الإحصائية من الصيغة رقم (3-41) ، (3-42)

$$t = \frac{Z_1}{\sqrt{\frac{V_1^2}{n-2}}} \sim tn-2 \dots (3-43)$$

وتتوزع وفقا لتوزيع t بدرجات حرية (n-2) أى أن:

$$t = \frac{(\hat{\beta} - \beta) \sqrt{\sum_{i=1}^n x_i^2}}{\sigma^2} \sim tn - 2 \dots \dots \dots (44 - 3)$$

ويلاحظ أنه تم التخلص من القيمة الحقيقية لـ  $\sigma$  بإستعمال إحصائية t، وبالتالي تمكنا من الحصول على دالة اختبار تعتمد على العينة وقيمة  $\beta$ ، وبالتالي تمكنا من الحصول على دالة اختبار تعتمد على العينة وقيمة  $\beta$  الافتراضية.

ولإجراء اختبارات الفروض، نفترض الآتى:-

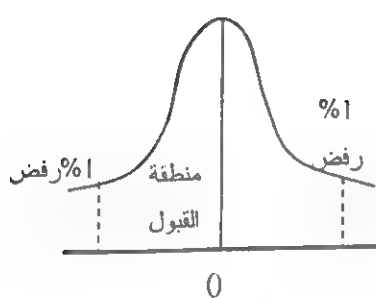
- الفرض العدم  $H_0: \beta = 0$  - يعنى عدم وجود علاقة معنوية بين المتغير المستقل والمتغير التابع.
- الفرض البديل  $H_1: \beta \neq 0$  - يعنى وجود علاقة معنوية بين المتغير المستقل والمتغير التابع.

وهذا يعنى تعويض القيمة الافتراضية  $\beta_0$  بدلا من  $\beta$  فى الصيغة رقم (44-3) ويتخذ القرار الإحصائى برفض  $H_0$  إذا وقعت القيمة المحسوبة لـ t فى المنطقة الحرجة المحددة من توزيع t بدرجات حرية (n-2). ونقبل الفرض البديل، أى وجود علاقة معنوية بين المتغير التابع والمتغير المستقل. هذا وتسمى المنطقة التى نقبل بداخلها فرض العدم  $H_0$  "منطقة القبول" أما المنطقة التى نرفض بداخلها فرض العدم فتسمى "منطقة الرفض".

ويوضح الشكل رقم (6-3) منطقتى الرفض والقبول عند مستوى 5%، 1%.

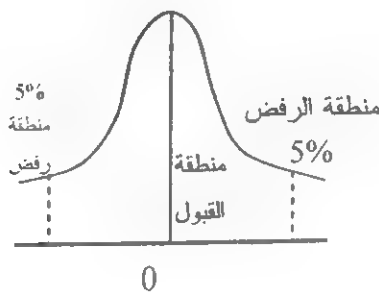
### شكل رقم (3-6)

منطقة الرفض والقبول وفقاً لمستوى المعنوية



شكل B

مستوى معنوية 1%



شكل A

مستوى معنوية 5%

### ثانياً: الاختبارات الخاصة بالمعلمة $\hat{\alpha}$

يمكن استخدام الصيغة رقم (3-39) لتكون نقطة البداية لإجراء

الاختبارات على المعلمة  $\alpha$ .

$$\alpha' \sim n \left( \alpha, \frac{\sum_{i=1}^N X_i^2}{n \sum_{i=1}^N x_i^2} \cdot \sigma_u^2 \right)$$

بفرض تعريف المتغير  $Z_2$  على أنه متغير موزع توزيعاً طبيعياً معيارياً

كما يلي:

$$Z_1 = \frac{(\alpha' - \alpha) \sqrt{n \sum_{i=1}^n x_i^2}}{\sigma u \sqrt{n \sum_{i=1}^n x_i^2}} \dots \dots \dots (45-3)$$

كما أن  $V_2^2$  التباين :-

$$V_2^2 = \frac{(n-2)\sigma^2}{\sigma u^2} \dots \dots \dots (45-3)$$

$V_2^2$  موزعة حسب  $q^2$  ،  $X^2$  بدرجات حرية  $(n-2)$ . ومن الصيغة (45-3)، (46-3) تكون  $t$  الإحصائية :-

$$t = \frac{(\alpha' - \alpha) \sqrt{n \sum_{i=1}^n x_i^2}}{\sigma' \sqrt{n \sum_{i=1}^n x_i^2}} \sim t - 2 \dots \dots \dots (47-3)$$

ويلاحظ انه تم التخلص من  $\sigma$  باستعمال إحصائية  $t$ ، وبالتالي يمكننا من الحصول على دالة اختبار تعتمد على العينة وقيمة  $\alpha$  الافتراضية. ويمكن إجراء اختبارات الفروض كما في المعلمة  $\beta'$ . ومعنى فرض العدم هنا أن خط الإنحدار الحقيقي في المجتمع يمر بنقطة الأصل  $(H_0, \alpha=0)$ ، أما الفرض البديل  $(H_1, \alpha \neq 0)$  يعنى أن الجزء المقطوع من محور يختلف معنوياً عن الصفر.

### 3/3/3 إنشاء فترات الثقة للمعاملات $\hat{\alpha}$ ، $\hat{\beta}$

يمكن إنشاء فترات الثقة للمعاملات  $\hat{\alpha}$  ،  $\hat{\beta}$  باستعمال توزيع t تعويضا عن التوزيع الطبيعي حيث نحصل على:-

$$\Pr\{-t_{E/2} \leq t \leq t_{E/2}\} = 1 - E \dots\dots\dots (48-3)$$

ونلاحظ أن  $1-E$  هي مستوى الثقة للاختبار، ويمكن تطبيق الصيغة رقم

(48-3) على المعاملات  $\hat{\alpha}$  ،  $\hat{\beta}$  كما يلي:  
بالنسبة  $\hat{\beta}$  :-

$$t = (\hat{\beta} - \beta) / S.e(\hat{\beta})$$

وبالتعويض في الصيغة رقم (40-3)

$$\Pr\left\{-t_{E/2} \leq \frac{(\hat{\beta} - \beta)}{S.e(\hat{\beta})} \leq t_{E/2}\right\} = 1 - \varepsilon$$

ويمكن كتابتها كما يلي:

$$\Pr\left\{\hat{\beta} - t_{E/2} S.e(\hat{\beta}) \leq \beta \leq \hat{\beta} + t_{E/2} S.e(\hat{\beta})\right\} = 1 - \varepsilon \dots\dots\dots (49-3)$$

وتعطى المعادلة رقم (49-3) ، % (1-3) فترة منتظمة للمعلمة  $\beta$

ويكون حداً الثقة % (100-E) هما:

$$\beta \pm t_{E/2} \cdot S.e(\hat{\beta}) \dots\dots\dots (50-3)$$

بالنسبة للمعلمة  $\hat{\alpha}$ .

باستخدام الصيغة رقم (3-48) فإن:

$$\Pr\left\{-t_{E/2} \leq \frac{(\hat{\alpha} - \alpha)}{S.e(\hat{\alpha})} \leq +t_{E/2}\right\} = 1 - \varepsilon \dots\dots\dots (3-51)$$

وبالتالى:

$$\hat{\alpha} \pm t_{E/2} S.e(\hat{\alpha}) \dots\dots\dots (3-52)$$

وقبل ختام هذا الجزء نشير إلى أن المعلمة  $\sigma_{\mu}^2$  يمكن الحصول على الاختبارات الخاصة بها من توزيع  $X^2$  حيث تعطى:

$$\Pr\left\{X_{1-E/2}^2 < \frac{(n-2)\hat{\sigma}^2}{\sigma^2} < X_{E/2}^2\right\} = 1 - \varepsilon \dots\dots\dots (3-53)$$

فترة الثقة %  $100(1-\varepsilon)$  للمعلمة  $\sigma_{\mu}^2$  بحدى ثقة:

$$\frac{(n-2)\hat{\sigma}^2}{X_{E/2}^2}, \frac{(n-2)\hat{\sigma}^2}{X_{1-E/2}^2}$$

### 3/4- قياس القدرة التفسيرية للنموذج .

بعد تقدير معالم العلاقات الإقتصادية باستخدام طريقة المربعات الصغرى،

يتطلب الأمر معايير للحكم على جودة التقديرات، وهناك معيارين هامين:-

1- الأخطاء المعيارية لتقديرات المعالم، وقد تم مناقشتها فى الجزء السابق من هذا الفصل.

2- معامل التحديد  $R^2$ ، وسيتم مناقشته فى هذا الجزء من الفصل الثالث:

### 1/4/3 معامل التحديد $R^2$

يعرف معامل التحديد  $R^2$  بأنه النسبة من التغير الإجمالي فى  $Y$  والذي يفسره إنحدار  $Y$  على  $X$  ، ومن ثم يوضح نسبة التغيرات التى تحدث فى المتغير التابع  $Y$  بسبب المتغير المستقل (التفسيري)  $X$ . ويمكن حسابه كما يلى:-

يعرف التغير الكلى للمتغير التابع  $Y$  ، بأنه مجموع مربعات إنحرافات قيم المتغير التابع  $Y$  عن وسطه الحسابى  $\bar{Y}$  [Total sum of squares] ونرمز له بالرمز TSS.

$$TSS = \sum_{i=1}^n (Y_i - \bar{Y})^2 \dots\dots\dots (54-3)$$

ويمكن تقسيم مجموع المربعات TSS إلى جزأين:-

1- الجزء الأول ويعرف بإسم مجموع مربعات الإنحدار ونرمز له بالرمز "ESS" أو يمكن تعريفه بأنه مجموع المربعات المفسرة Explained Sum of Squares، ويشير إلى التغير أو الاختلاف المفسر أى مقدار التغير فى  $Y$  الذى يرجع إلى  $X$ . وهو عبارة عن مجموع مربعات إنحراف قيم  $Y$  عن وسطها الحسابى  $\bar{Y}$  . أى أن:

$$ESS = \sum_{i=1}^n (Y_i - \bar{Y})^2 \dots\dots\dots (55-3)$$

2- الجزء الثانى: يسمى مجموع مربعات البواقي Residual sum of Squares ونرمز له بالرمز RSS، ويشير إلى التغير أو الاختلاف غير المفسر الذى لا يرجع إلى المتغير التفسيري  $X$  وإنما يرجع إلى التغيرات العشوائية فى النموذج.

\_\_\_\_\_ الفصل الثالث \_\_\_\_\_ نموذج الإحداد الخطى البسيط

وهو عبارة عن مجموع مربعات إنحراف  $\hat{Y}$  عن القيمة المقدرة لها.

$$RSS = \sum_{i=1}^n \left( Y_i - \hat{Y} \right)^2 \dots\dots\dots (56-3)$$

ويمكن توضيح كيفية الحصول على الصيغ (54-3) و (55-3) و (56-3) كما يلي:-

$$\sum_{i=1}^n \left( Y_i - \hat{Y} \right)^2 = \sum \left[ \left( Y_i - \hat{Y} \right) + \left( \hat{Y}_i - \bar{Y} \right) \right]^2 \dots\dots\dots (57-3)$$

$$\sum_{i=1}^n \left( Y_i - \bar{Y} \right)^2 = \sum_{i=1}^n \left[ \left( Y_i - \hat{Y}_i \right)^2 + 2 \left( Y_i - \hat{Y}_i \right) \left( \hat{Y}_i - \bar{Y} \right) + \left( \hat{Y}_i - \bar{Y} \right)^2 \right] \dots\dots\dots (58-3)$$

$$= \sum_{i=1}^n \left( Y_i - \hat{Y}_i \right)^2 + 2 \sum_{i=1}^n \left[ \left( Y_i - \hat{Y}_i \right) \left( \hat{Y}_i - \bar{Y} \right) + \sum_{i=1}^n \left( \hat{Y}_i - \bar{Y} \right)^2 \right] \dots\dots\dots (58-3)$$

وبالاستعانة بالمعادلتين الطبيعيتين أرقام (7-3) ، (8-3) فإن الحد الأوسط  $2 \sum_{i=1}^n (Y_i - \hat{Y}_i)(\hat{Y}_i - \bar{Y})$  في الصيغة رقم (58-3) يساوى صفر، معنى ذلك أن مجموع المربعات الكلى يمكن كتابته على النحو التالى:

$$\sum_{i=1}^n \left( Y_i - \bar{Y} \right)^2 = \sum_{i=1}^n \left( Y_i - \hat{Y}_i \right)^2 + \sum_{i=1}^n \left( \hat{Y}_i - \bar{Y} \right)^2 \dots\dots\dots (59-3)$$

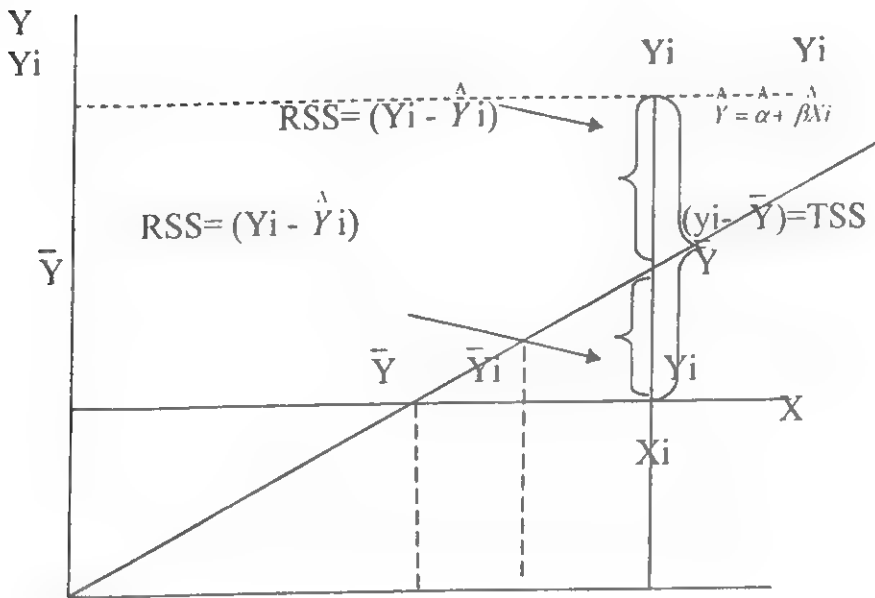
$$TSS = RSS + ESS \dots\dots\dots (60-3)$$

ويمكن توضيح طريقة تقسيم مجموع التغير الكلى فى المتغير التابع ببيانها كما فى الشكل رقم (7-3).



شكل رقم (3-7)

تقسيم مجموع التغير الكلى فى المتغير التابع  $(Y_i)$



وتمثل المسافة الرأسية بين النقطتين  $X_i, Y_i$ ، والخط الأفقى الذى يمثل الوسط الحسابى التابع  $\bar{Y}$  الانحراف  $(Y_i - \bar{Y})$  لذلك فإن مجموع مربعات الانحراف الكلى يعبر عن الانحراف الكلى عن الخط الأفقى  $\sum_{i=1}^n (Y_i - \bar{Y})^2$ ، والانحراف  $(\hat{Y}_i - \bar{Y})$  هو المسافة الرأسية بين النقطة المقدرة  $\hat{Y}_i$  على خط الانحدار والخط الأفقى الممثل للوسط الحسابى  $\bar{Y}$  للمتغير التابع، وهذه القيمة تتأثر تأثراً كبيراً بمعامل الانحدار، أو بمعنى آخر لوجود الرابطة بين المتغيرين موضع الدراسة. والانحراف  $(Y_i - \hat{Y}_i)$  عبارة عن المسافة الرأسية بين النقطة

$X_i, Y_i$  والنقطة المقدرة  $\hat{Y}_i$  والواقعة على خط الانحدار ولذلك فإن مجموع مربعات البواقي  $\sum e_i^2$  أو  $RSS$  يقيس تشتت النقط المختلفة حول خط الانحدار، وهذا التشتت يرجع إلى عوامل الصدفة البحتة، وتصبح قيمة مجموع مربعات الخطأ صفر إذا انطبقت النقط الأصلية (المشاهدة) على النقط التقديرية تماماً.

وتسمى النسبة بين مجموع مربعات الانحدار إلى مجموع التغير الكلى فى  $Y$  بمعامل التحديد ويرمز له بالرمز  $R^2$  (مربع معامل الارتباط بين  $X, Y$  فى حالة نموذج الانحدار الخطى البسيط)، ولذلك إذا كان التغير المشروح أو المفسر يساوى صفر فإن مجموع التغير يصبح غير مفسر أو مشروح وبيصبح معامل التحديد مساوياً للصفر. أما إذا كان التغير غير المفسر يساوى صفرًا فإن مجموع التغير الكلى يصبح كله مفسراً ويكون معامل التحديد واحد صحيح. وفى الحالات الأخرى يكون معامل التحديد بين الصفر والواحد الصحيح. وعلى ذلك يمكن كتابة معامل التحديد كما يلى:

$$R^2 = \frac{ESS}{TSS} = \frac{\text{مجموع مربعات الانحدار}}{\text{مجموع المربعات الكلى}} \quad \dots (61-3)$$

ولذلك فإن معامل التحديد  $R^2$  يوضح نسبة التغير فى المتغير التابع التى يمكن شرحها أو تفسيرها بواسطة المتغير المستقل، وعلى ذلك فهو يعتبر مقياساً للقوة التفسيرية فى النموذج، ومن الطبيعى كلما كانت قيمة معامل التحديد قريبة من الواحد الصحيح كانت ثقتنا فى التقدير كبيرة، شرط ألا يكون ذلك ناتج عن بعض مشاكل القياس التى يعانى منها النموذج.

### 5/3 اختبار معنوية العلاقة الخطية للإنحدار:

يمكن الاستفادة من تقسيم مجموع المربعات الكلى إلى مجموع مربعات الإنحدار ومجموع مربعات البواقي، فى اختبار معنوية العلاقة الخطية للإنحدار بين المتغيرين  $X, Y$ . من خلال تكوين ما يعرف بجدول تحليل التباين [ANOVA] Analysis of Variance.

جدول تحليل التباين

ANOVA

مصدر التغير	درجات الحرية	مجموع المربعات	متوسط مجموع المربعات	$F_c$
الإنحدار المتغير ( $X$ )	1	ESS	$\frac{ESS}{1}$	$\frac{ESS/1}{RSS/n-2}$
البواقي	$n-2$	RSS	$\frac{RSS}{n-2}$	
الكلى	$n-1$	TSS		

ويتم صياغة فرض العدم والفرض البديل كما يلى:-

$$H_0 : \beta=0 \quad \text{فرض العدم}$$

الإنحدار غير معنوى

$$H_0 : \beta \neq 0 \quad \text{الفرض البديل}$$

وباستخدام الاختبار  $F_c$  يمكن قبول أو رفض فرض العدم. من خلال مقارنة  $F_c$  المحسوبة (كما فى جدول تحليل التباين) بقيمة  $F$  المستخرجة من جدول توزيع  $F$  كما يلى:

إذا كانت:

$$F(1, n-2, \epsilon) \leq F_c$$

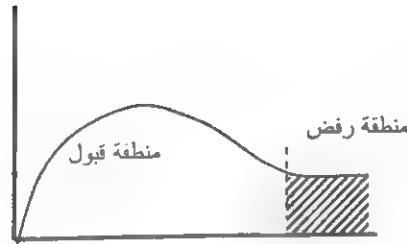
\_\_\_\_\_ الفصل الثالث \_\_\_\_\_ نموذج الانحدار الخطى البسيط

نرفض الفرض العدم، ونقبل الفرض البديل أى معنوية العلاقة.  
أما إذا كانت

$$F(1, n-2, \varepsilon) > F_c$$

نقبل فرض العدم أى أن الانحدار غير معنوى وتظهر الرفض والقبول  
كما فى الشكل رقم (8-3).

شكل رقم (8-3)  
منطقة قبول ورفض



$$F(1, n-2, \varepsilon)$$

ويمكن إعادة كتابة اختبار  $F_c$  بدلالة معامل التحديد  $R^2$  كما يلى:-

$$TSS = RSS + ESS$$

$$R^2 = \frac{ESS}{TSS}$$

$$ESS = R^2 \cdot TSS$$

$$RSS = (1 - R^2) TSS$$

وبالتعويض عن ESS ، RSS وفقاً لصيغة  $F_c$  كما في جدول تحليل التباين:  
حيث أن:

$$F_c = \frac{ESS/1}{TSS/n-2}$$

$$F_c = \frac{ESS/1}{TSS/n-2}$$

∴

$$F_c = \frac{ESS}{RSS} \quad . (n-2)$$

$$F_c = \frac{R^2 ESS}{(1-R^2) TSS} \quad . (n-2)$$

$$F_c = \frac{R^2}{1-R^2} \quad . (n-2) \dots\dots\dots (62-3)$$

### 6/3. ملاحظات على أهمية الاختبارات الإحصائية لمعاملات النموذج

عرفنا من الجزء السابق أن أهم المعايير الإحصائية استخداماً للحكم على جودة توفيق خط الانحدار، معيار معامل التحديد، والمعيار الخاص بالأخطاء المعيارية للتقديرات. وليس هناك اتفاق عام بين الإقتصاديين القياسيين في تقرير أي المعيارين الإحصائيين أكثر أهمية: معامل التحديد المرتفع أم الخطأ المعياري للتقدير المنخفض. ولا توجد مشكلة بطبيعة الحال إذا أشارت النتائج إلى معامل تحديد مرتفع وأخطاء معيارية منخفضة. لكن هذه ليست الحالة الغالبة. ففي كثير من التطبيقات نحصل على معامل تحديد مرتفع بينما ترتفع الأخطاء المعيارية لبعض المعلمات. ويميل بعض الإقتصاديين القياسيين إلى إعطاء أهمية كبيرة لمعامل التحديد، وقبول تقديرات المعالم

بالرغم من عدم تحقيق بعضها معنوية إحصائية. ويقترح البعض الآخر أن قبول أو رفض التقديرات التي تثبت عدم معنويتها يجب أن يعتمد على الهدف من النموذج.

ونرى الأغلبية أن معامل التحديد يكون له أهمية إذا استخدم النموذج في التنبؤ بالقيم المستقبلية للظاهرة تحت الدراسة، على أن تتال الأخطاء المعيارية أهمية أكبر إذا كان الهدف من الدراسة هو تحليل الظاهرة الإقتصادية، بمعنى تحديد أى المتغيرات التفسيرية معنوى وأيهما غير معنوى، إلى جانب الحصول على تقديرات دقيقة للمعامل.

وتجدر الإشارة إلى أن معامل التحديد المرتفع له ميزته إذا كان مصحوباً بأخطاء معيارية منخفضة للتقديرات، أما إذا لم يتوافر المعامل المرتفع والأخطاء المعيارية المنخفضة كان لزاماً على الباحث أن يكون حريصاً فى تفسيره وتحليله وقبول النتائج. ولا شك أن الأولوية يجب أن تعطى أولاً للمعايير الإقتصادية من حيث قيم وإشارات المعامل، فبعد استيفائها تبدأ مرحلة الاختيارات الإحصائية.

7/3 حالة عملية

9.6	8.6	8.6	5.6	5.6	7.6	6.6	4.6	3.6	4.6	Yi
12	10	9	6	7	8	8	6	4	5	Xi

حيث تشير:

Yi إلى الإستهلاك

Xi الدخل

المطلوب:

- 1- تقدير دالة الإستهلاك.
- 2- اختيار معنوية معالم دالة الإستهلاك بمستوى معنوية 5%
- 3- تكوين فترات الثقة للمعالم.
- 4- إيجاد معامل التحديد وتفسيره.
- 5- إيجاد معامل الارتباط بين الدخل والإستهلاك.
- 6- اختبار معنوية العلاقة الخطية للإنحدار باستخدام اختبار F وتكوين جدول تحليل التباين.

الحل:

يمكن الإجابة على هذه المطالب من خلال تكوين الجدول رقم (1-3).

جدول رقم (1-3)

OBS	Consumption Yi	Income Xi	$(Y_i - \bar{Y})$	$(X_i - \bar{X})$	$(Y_i - \bar{Y})(X_i - \bar{X})$	$(X_i - \bar{X})^2$	Y'1	Ei
1	4.6	5	-1.9	-2.5	4.75	6.25	4.47619	0.123810
2	3.6	4	-2.9	-3.5	10.15	12.25	3.66667	-0.06667
3	4.6	6	-1.9	-1.5	2.85	0.25	5.285714	-0.685714
4	6.6	8	0.1	0.5	0.05	0.25	6.904762	-0.309762
5	7.6	8	1.1	0.5	0.55	0.25	6.90762	0.695238
6	5.6	7	-0.9	-0.5	0.45	0.25	6.095238	-0.495238
7	5.6	6	-0.9	-1.5	1.35	2.25	5.285714	0.314286
8	8.6	9	2.1	1.5	3.15	2.25	7.714286	0.885714
9	8.6	10	2.1	2.5	5.25	6.25	8.523810	0.076190
10	9.8	12	3.1	4.5	13.95	20.25	10.142857	-0.542857
Sum	65	75	0	0	42.5	52.5	65	0
Mean $\bar{X} = 7.5$							6.5	

1- معادلة الانحدار كما تنص عليها النظرية الإقتصادية:

$$Y_i = F(X_i) + u_i$$

$$Y_i = \alpha + \beta X_i + u_i$$

وتقدير معاملات النموذج فإن:

$$\beta' = \frac{\sum_{i=1}^n (Y_i - \bar{Y})(X_i - \bar{X})}{\sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2}$$

$$\sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2$$

$$\beta' = \frac{42.5}{52.5} = 0.80$$



$$\alpha' = \bar{Y} - \beta' \bar{X}$$

$$\alpha' = \bar{6.5} - 0.80 * 7.5 = 0.5$$

معنى ذلك أن دالة الإستهلاك المقدرة وفقا لبيانات العينة الموجودة فى الجدول هى

$$\hat{Y}_i = 0.5 + 0.8 X_i$$

وهذه الدالة المقدرة تتوافق مع توقعات النظرية الإقتصادية لها حيث أن:  $\beta'$  والتى تعبر عن الميل الحدى للإستهلاك، موجبة وأقل من الواحد كما تنص النظرية الإقتصادية أيضا.  $\alpha'$  الحد الأدنى للإستهلاك حتى لو كان  $X_i$  صفر، موجب كما تنص النظرية الإقتصادية أيضا.

## 2. اختبار معنوية معالم دالة الإستهلاك المقدرة.

ولإجراء اختبارات معنوية معالم دالة الإستهلاك يجب الحصول على الآتى:

$$\sigma'^2$$

$$S.e(\alpha'), \text{Var}(\alpha')$$

$$S.e(\beta'), \text{Var}(\beta')$$

$$\text{COV}(\alpha', \beta')$$

أ- تبين البواقي هو تقدير غير متحيز لتباين الخطأ العشوائى ونحصل عليه من القانون الآتى:

$$\sigma^2 = \frac{\sum_{i=1}^n e_i^2}{n-2} = \frac{2.494927}{10-2} = 0.3118$$

ب- تبين  $\alpha'$  وخطؤها المعياري

$$Var(\alpha') = \frac{\sum_{i=1}^n X_i^2}{n \sum_{i=1}^n x_i^2} \cdot \sigma^2$$

$$\sum_{i=1}^n X_i^2 = 615$$

$$\sum_{i=1}^n x_i^2 = 52.5$$

$$n=10$$

$$\sigma^2 = 0.3118$$

$$Var(\alpha') = \frac{615}{10 * 52.5} * 0.3118 = 0.36525$$

$$S.e(\alpha') = \sqrt{Var(\alpha')} = \sqrt{0.365} = 0.6043603$$

ج- تبين  $\beta'$  وخطؤها المعياري

$$Var(\beta') = \sigma^2 / \sum_{i=1}^n x_i^2$$

$$Var(\beta') = \frac{0.3118}{52.5} = 0.0059$$

$$S.e(\beta') = \sqrt{Var(\beta')} = \sqrt{0.0059} = 0.0768$$

د- التباين  $Cov(\alpha', \beta')$

أولاً: المعلمة  $\alpha'$

$$COV(\alpha', \beta') = -\frac{X}{\sum_{i=1}^n x_i^2} \cdot \sigma'^2$$

$$COV(\alpha', \beta') = -\frac{7.5}{52.5} * 0.3118$$

$$= -0.0445$$

بعد الحصول على القيم كما فى النقاط أ، ب، ج، د يمكن عمل اختبار t لكل من  $\alpha'$ ،  $\beta'$  كما يلي:

$$t^* = \frac{\alpha' - \alpha}{S.e(\alpha')}$$

وبالتعويض فى هذه الصيغة نحصل على t المحسوبة.

$$t^* = \frac{0.5 - 0}{0.604} = 0.827$$

بعد الحصول على  $t^*$  المحسوبة نقارنها بـ t الجدولية بدرجات حرية "n-2" ثم نقرر قبول الفرض العدم أو رفضه.

ثانياً: المعلمة  $\hat{\beta}$

$$t^* = \frac{\beta' - \beta}{S.e(\beta')}$$

وبالتعويض فى هذه الصيغة  $t^*$

$$t^* = \frac{0.8 - 0}{0.0768} = 10.41666$$

\_\_\_\_\_ الفصل الثالث \_\_\_\_\_ نموذج الإحذار الخطى البسيط

ثم نقارن بين  $t^*$  المحسوبة،  $t$  الجدولية بمستوى معنوية محدد وعلى أساسها نقبل الفرض العدم أو الفرض البديل.

### 3- تكوين فترات الثقة لمعاملات $\alpha'$ ، $\beta'$ .

بفرض أن مستوى المعنوية 95% يمكن تكوين فترات الثقة لكل من  $\alpha'$ ،  $\beta'$  كما يلي:

أ- فترة الثقة للمعلمة  $\alpha'$  هي:

$$\alpha' \pm T_{3/2} \cdot S.e(\alpha')$$

$$0.5 \pm (2.306)(0.604)$$

$$0.5 \pm 1.392$$

$$1.892824 > \alpha' > -0.892824$$

أى أن  $\alpha'$  تقع فى المدى المحدد السابق بدرجة ثقة 95%. ونلاحظ اتساع فترة الثقة للمعلمة  $\alpha'$  نوعا ما. ويلاحظ أيضا أن  $\alpha'$  يمكن أن تساوى الصفر بالتالى قد لا تكون معنوية.

ب- فترة الثقة للمعلمة  $\beta'$  هي:

$$\beta' \pm T_{3/2} \cdot S.e(\beta')$$

$$0.8 \pm (2.306)(0.0768)$$

أى أن  $\beta'$  تقع فى المدى

$$0.9771008 > \beta' > 0.6228992$$

بدرجة ثقة 95%. ونلاحظ أن  $\beta'$  تختلف معنويا عن الصفر، مما يوضح أن  $\beta'$  معنوية.

### 3. معامل التحديد $R^2$ :

يمكن حساب معامل التحديد من الصيغة رقم (3-61) كما يلي:

$$R^2 = \frac{ESS}{RSS}$$

أو يمكن حسابه من معامل الارتباط كما يلي:

$$R = \frac{\sum_{i=1}^n (Y - \bar{Y})(X - \bar{X})}{\sqrt{\sum_{i=1}^n (Y - \bar{Y})^2} \sqrt{\sum_{i=1}^n (X - \bar{X})^2}}$$

$$R = \frac{42.5}{\sqrt{36.9} \sqrt{52.5}} = \frac{42.5}{6.0745 * 7.245} = \frac{42.5}{44.013}$$

$$R = 0.96$$

وهو ارتباط طردى قوى. ومنه يمكن الحصول على معامل التحديد  $R^2$  والذي يساوى 0.93، وهذا يعنى أن 93% من التغيرات التى تحدث فى  $Y_i$  (الإستهلاك) كمتغير تابع ترجع إلى التغيرات فى المتغير  $X_i$  (المستقل أو المفسر) الدخل، 7% ترجع إلى التغيرات العشوائية، وبالتالي نكون حصلنا على المطلوب رقم 5 فى الحالة العملية.

## 6. جدول تحليل التباين:

يمكن تكوين جدول تحليل التباين كما يلي:

جدول تحليل التباين ANOVA

مصدر التغير	درجات الحرية	مجموع المربعات	متوسط مجموع المربعات	F <sub>c</sub>
الإنحدار المتغير (X)	1	ESS 34.408	ESS 34.408	$\frac{*}{**}$
البواقي	8	RSS 2.492	$\frac{**RSS}{8}$ 0.3115	$F_c = \frac{34.408}{0.3115} = 110.45$
الكلى	9	TSS 36.9		

هذا ويمكن الحصول على F المحسوبة عن طريق معامل التحديد

$$F_c = \frac{R^2}{1 - R^2} * n - 2$$

$$F_c = \frac{0.93}{1 - 0.93} * 8 = 106.2$$

تقريباً نفس القيمة، ثم نقارن F<sub>c</sub> المحسوبة مع F الجدولية ونقبل الفرض العدم أو الفرض البديل.



## الفصل الرابع

### نموذج الانحدار الخطى المتعدد





يعتبر نموذج الإنحدار الخطى المتعدد أو ما يعرف بالنموذج العام، الإمتداد الطبيعي والمنطقي للنموذج الخطى لمتغيرين (Y, X) حيث يعالج الوضع الناشئ عند استخدام K-1 متغير مستقل  $X_1, X_2, X_3, \dots, X_k$  لتفسير التغيرات في المتغير التابع Y في معادلة إنحدار واحدة. وتتشابه المفاهيم في هذه الحالة مع تلك المستعملة في حالة الإنحدار الخطى البسيط (Y, X)، لذلك سوف يناقش هذا الفصل، صياغة نموذج خطى عام، طريقة التقدير الإحصائية وخصائصها الحسابية والإحصائية، والاختبارات الإحصائية لتقديرات المربعات الصغرى، ثم قياس القدرة التفسيرية للنموذج. ولكن نظراً لتعدد المتغيرات المستقلة فإننا نستعمل طرق جبر المصفوفات، وتتسم هذه الطرق بالعمومية والمرونة، حيث يمكن تطبيقها على حالات المتغيرين، والمتغيرات الثلاثة، أو أى عدد من المتغيرات شريطة ألا يفوق عدد المتغيرات عدد المشاهدات المستخدمة للتقدير.

#### 1/4 - صياغة النموذج الخطى العام General Linear Model

يمكن صياغة النموذج الخطى العام، من خلال معادلة الإنحدار التالية:-

$$Y_i = \beta_1 + \beta_2 X_{2i} + \beta_3 X_{3i} + \dots + \beta_k X_{ki} + u_i \dots \dots \dots (1-4)$$

حيث أن:-

- 1-  $Y_i$  المتغير التابع.
- 2-  $X_1, X_2, X_3, \dots, X_k$  المتغيرات المستقلة.
- 3- K-1 عدد المتغير المستقلة.
- 4-  $i=1,2,\dots,n$  عدد المشاهدات
- 5-  $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_k$  معلمات دالة الإنحدار.
- 6-  $u_i$  المتغير العشوائى.

وتعتبر المعادلة رقم (1-4) واحدة من جملة معادلات يبلغ عددها  $n$ ،  
كما فى نظام المعادلات الآتية:-

$$\begin{aligned} Y_1 &= \beta_1 + \beta_2 X_{21} + \beta_3 X_{31} + \dots + \beta_k X_{k1} + u_1 \\ Y_2 &= \beta_1 + \beta_2 X_{22} + \beta_3 X_{32} + \dots + \beta_k X_{k2} + u_2 \\ &\vdots \\ Y_n &= \beta_1 + \beta_2 X_{2n} + \beta_3 X_{3n} + \dots + \beta_k X_{kn} + u_n \end{aligned}$$

ويمكن تمثيل هذه المعادلات فى الشكل التالى بإستعمال المصفوفات كما يلى:

$$\begin{bmatrix} Y_1 \\ Y_2 \\ \dots \\ Y_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & X_{21} & X_{31} & \dots & X_{n1} \\ 1 & X_{22} & X_{32} & \dots & X_{k2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & X_{2N} & X_{3n} & \dots & X_{KN} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \dots \\ \beta_n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mu_1 \\ \mu_2 \\ \dots \\ \mu_n \end{bmatrix} \quad (2-4)$$

والصيغة رقم (2-4) يمكن اختصارها كما يلى:

$$Y = X\beta + \mu \quad (3-4)$$

حيث أن:

1-  $Y$  متجه عمودى من درجة  $nx1$ ،  $n$  عدد المشاهدات للمتغير التابع  $Y$ .

2-  $X$  مصفوفة من الدرجة  $nxk$  تحتوى مشاهدات المتغيرات المستقلة

$X_1, X_2, X_3, \dots, X_k$  وعمودها الأول يحتوى على قيم الواحد الصحيح.

3-  $\beta$  متجه عمودى من درجة  $kx1$  يحتوى على المعالم المجهولة  $\beta_1, \beta_2, \beta_3, \dots, \beta_k$ .

4-  $\mu$  متجه عمودى من درجة  $nx1$  يحتوى على قيم المتغير العشوائى  $u_i$  المجهولة.

و على اعتبار أن العلاقة (4-3) هي العلاقة الحقيقية فإنها مجهولة، ويراد تقدير معالمها باستخدام الإحصاءات المتوافرة حول المتغير التابع  $Y$  والمتغيرات المستقلة  $X_2, X_3, \dots, X_K$ . ويمكن استخدام طريقة المربعات الصغرى فى حالة النموذج العام، كما فى حالة الإنحدار الخطى البسيط، وتحت نفس الفروض كما يلى:-

1- القيمة المتوقعة (الوسط الحسابى) لمتجه المتغير العشوائى تساوى قيمة الصفر، أى أن:-

$$E(\mu) = 0$$

حيث أن 0 متجه الصفر من درجة  $n \times 1$ . ويعنى هذا الفرض أن القيمة المتوقعة لكل عنصر من عناصر المتجه العشوائى  $\mu$  تساوى الصفر، أى

$$E(\mu) = E \begin{bmatrix} \mu_1 \\ \mu_2 \\ \dots \\ \dots \\ \mu_m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} E(\mu_1) \\ E(\mu_2) \\ \dots \\ \dots \\ E(\mu_m) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \dots \\ \dots \\ 0 \end{bmatrix} = 0$$

2- تماثل التباين واستقلال المتغيرات المستقلة:

وهذا يعنى ثبات تباين المتغير العشوائى، والتغاير بين المتغيرات المستقلة صفر، أى انعدام الارتباط الذاتى.

$$COV(\mu) = E(\mu\mu') = \sigma^2/n$$

حيث  $\mu'$  تدوير المتجه  $\mu$ ،  $1n$  مصفوفة الوحدة من الدرجة  $n \times n$ . أى أن:

$$COV(\mu) = E(\mu\mu')$$

$$= E \begin{bmatrix} \mu_1 \\ \mu_2 \\ \dots \\ \dots \\ \mu_n \end{bmatrix} = [\mu_1 \quad \mu_2 \quad \dots \quad \mu_n]$$

$$= E \begin{bmatrix} \mu_1^2 & \mu_1 \mu_2 & \dots & \mu_1 \mu_n \\ \mu_2 \mu_1 & \mu_2^2 & \dots & \mu_2 \mu_n \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \mu_n \mu_1 & \mu_n \mu_2 & \dots & \mu_n^2 \end{bmatrix}$$

$$= E \begin{bmatrix} E(\mu_1^2) & E(\mu_1 \mu_2) & \dots & E(\mu_1 \mu_n) \\ \mu_2 \mu_1 & E(\mu_2^2) & \dots & E(\mu_2 \mu_n) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ E(\mu_n \mu_1) & E(\mu_n \mu_2) & \dots & E(\mu_n^2) \end{bmatrix}$$

$$= E \begin{bmatrix} \text{Var}(\mu_1) & \text{cov}(\mu_1 \mu_2) & \dots & \text{cov}(\mu_1 \mu_n) \\ \text{Cov}(\mu_2 \mu_1) & \text{Var}(\mu_2) & \dots & \text{cov}(\mu_2 \mu_n) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \text{COV}(\mu_n \mu_1) & \text{cov}(\mu_n \mu_2) & \dots & \text{Var}(\mu_n) \end{bmatrix}$$

وباستخدام فرض ثبات التباين وانعدام الارتباط الذاتي:

$$\text{Var}(\mu_i) = E(\mu_i^2) = \sigma^2$$

$$\text{COV}(\mu_i \mu_i) = \text{COV}(\mu_i \mu_i) = 0, i \neq j$$

فإنه يمكننا كتابة المصفوفة السابقة على النحو التالي:-

$$= E(\mu\mu') = \begin{bmatrix} \sigma^2 & 0 & \dots\dots\dots 0 \\ 0 & \sigma^2 & \dots\dots\dots 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots\dots\dots \sigma^2 \end{bmatrix}$$

$$= \sigma^2 \begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots\dots\dots 0 \\ 0 & 1 & \dots\dots\dots 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots\dots\dots 1 \end{bmatrix} = \sigma^2 I_n$$

وتسمى المصفوفة السابقة بمصفوفة التباين والتغاير للمتغير العشوائى

$\mu$ ، حيث تشكل عناصر القطر الرئيسى فى المصفوفة تباين قيم  $\mu$ ، بينما العناصر الأخرى تشكل التغاير والذي يساوى الصفر.

3- مصفوفة البيانات  $X$  فى الصيغة رقم (4-3) مصفوفة غير عشوائية، أى أنها تحتوى قيما ثابتة فى المعايينات المتكررة.

4- المتجه  $\mu$  لها توزيعا طبيعيا متعدد المتغيرات بمتجه وسط صفرى،

ومصفوفة تباين وتغاير عددية هى  $\sigma^2 I_n$  : أى أن

$$\mu \sim N(0, \sigma^2 I_n)$$

هذا ويمكن وضع النموذج الخطى العام فى الصيغة التالية:

$$\left. \begin{array}{l} Y = X\beta + \mu \\ E(\mu) = 0 \\ E(\mu\mu') = \sigma^2 I_n \\ \mu \sim N(0, \sigma^2 I_n) \end{array} \right\} \quad (4-4)$$

#### 2/4 طريقة التقدير الإحصائي وخصائصها:

تعتبر أفضل الطرق الإحصائية، لتقدير خط الانحدار، هي طريقة المربعات الصغرى، كما سبق الإشارة إلى ذلك أثناء دراسة الانحدار البسيط، لذلك سوف نقدم هذه الطريقة في هذا الجزء، ولكن مع نموذج الانحدار العام.

#### 1/2/4 طريقة المربعات الصغرى

يمكن الحصول على تقديرات المربعات الصغرى لمعاملات المجتمع المجهولة من خلال نموذج الانحدار العام - باستخدام جبر المصفوفات - كما يلي:

$$\left. \begin{array}{l} Y = \hat{Y} + e \\ Y = X\hat{\beta} + e \end{array} \right\} \quad (5-4)$$

حيث أن:-

$\hat{Y}$ : متجه عمودى من درجة  $n \times 1$  يحتوى على القيم المقدرة للمتغير التابع  $Y$ .  
 $\hat{\beta}$ : متجه عمودى من درجة  $K \times 1$  يحتوى على مقدرات المربعات الصغرى العادية  $\hat{\beta}_1, \hat{\beta}_2, \hat{\beta}_3, \dots, \hat{\beta}_k$

$e$ : متجه عمودى من درجة  $n \times 1$  يحتوى على البواقي.

ونحصل على تقديرات المربعات الصغرى العادية باختيار قيم  $\hat{\beta}$  التى

$$\sum_{i=1}^n e_i^2 \quad \text{تدنى مجموع البواقي إلى أدنى قيمة له. أى يجب تدنية}$$

حيث أن:

$$e'e = \begin{bmatrix} e_1 & e_2 & \dots & e_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e_1 \\ e_2 \\ \vdots \\ e_n \end{bmatrix}$$

$$= e_1^2 + e_2^2 + \dots + e_n^2$$

$$= \sum_{i=1}^n e_i^2$$

وبناء على ذلك تصبح النهاية الصغرى:

$$\sum_{\beta} e_i^2 = \min_{\beta} e'e$$

بما أن:

$$Y = X\hat{\beta} + e$$

$$E = Y - X\hat{\beta}$$

وبالتالى فإن:

$$e'e = (Y - X\hat{\beta})'(Y - X\hat{\beta})$$

$$= (Y' - \hat{\beta}'X')(Y - X\hat{\beta})$$

$$e'e = Y'Y - \hat{\beta}'X'Y - Y'X\hat{\beta} + \hat{\beta}'X'X\hat{\beta} \dots\dots\dots (7-4)$$

وبملاحظة  $\hat{\beta}'X'Y$  تساوى  $Y'X\hat{\beta}$  يمكن كتابة الصيغة رقم (7-4)

كما يلى:

$$e'e = Y'Y - 2\hat{\beta}'X'Y - Y'X\hat{\beta} \dots\dots\dots (7-4)1$$

وتفاضل الصيغة رقم 1 (7-4) بالنسبة لـ  $\hat{\beta}$  كما يلى:

$$\frac{\partial(e'e)}{\partial\hat{\beta}} = -2X'Y + 2X'X\hat{\beta} = 0 \dots\dots\dots (8-4)$$

نحصل على المعادلة الطبيعية فى شكل مصفوفات.

$$X'X\hat{\beta} = X'Y \dots\dots\dots (9-4)$$

وللحصول على قيم  $\hat{\beta}$  نضرب جانبي المعادلة بالمعكوس  $(X'X)^{-1}$

$$(X'X)^{-1} X'X\hat{\beta} = (X'X)^{-1} X'Y$$

$$\hat{\beta} = (X'X)^{-1} X'Y \dots\dots\dots (10-4)$$



\_\_\_\_\_ الفصل الرابع \_\_\_\_\_ نموذج الإنحدار الخطى المتعدد

وتعتبر المعادلة رقم (10-4) هي المعادلة الأساسية لمعاملات النموذج بطريقة المربعات الصغرى، في حالة النموذج الخطى العام. وهناك مجموعة من الخصائص بطريقة المربعات الصغرى، تجعلها جيدة في التقدير أو كما ذكر جاوز ماركوف أحسن تقدير خطى غير متحيز، يمكن عرضها من خلال نموذج الإنحدار العام.

#### 2/2/4 - الخصائص الحسابية لتقديرات المربعات الصغرى

أمكن الحصول على معلمات النموذج بطريقة المربعات الصغرى في حالة الإنحدار العام كما في المعادلة رقم (10-4)

$$\hat{\beta} = (X'X)^{-1} X'Y$$

ويمكن كتابة هذه المعادلة كما يلي:-

$$\hat{\beta} = (X'X)^{-1} X'(X\beta + \mu)$$

$$\hat{\beta} = (X'X)^{-1} X'X\beta + (X'X)^{-1} X'\mu$$

$$\therefore \hat{\beta} = \beta + (X'X)^{-1} X'\mu$$

ويلاحظ أن:

$$1- \text{ يتم التعويض عنها في الخطوة الثانية بقيمتها } \mu + X\beta = Y$$

$$2- (X'X)^{-1} X'X \text{ عبارة عن مصفوفة الوحدة أى قيمتها بواحد صحيح.}$$

وهذا على اعتبار أن البواقي - من التعريف - عبارة عن

$$e = Y - X\hat{\beta}$$

وبالتعويض عن  $\hat{\beta}$  تصبح:

$$e = Y - X(X'X)^{-1} X'Y$$

وبأخذ المنحة Y عامل مشترك

$$e = \{1 - X(X'X)^{-1} X'\} Y$$

$$e = MY \dots\dots\dots (12-4)$$

حيث أن  $M$

$$M = I - X(X'X)^{-1} X'$$

ولها الخواص التالية:

$$MM' = MM = M^2 = M, M = M'$$

لأن  $0 = MX$  ويمكن استنتاج الخواص التالية:

$$E(e) = 0 \quad -1$$

حيث أن:

$$E(e) = E(M\mu) = ME(\mu) = 0$$

-2 أى أن متوسط البواقي يساوى الصفر

$$X'e = 0$$

معنى ذلك استقلال البواقي عن المتغيرات المستقلة، حيث أن:

$$X'e = X'1(Y - X\hat{\beta}) = X'Y - X'X\hat{\beta} = 0$$

من المعادلة الطبيعية

$$X'X\hat{\beta} = X'Y$$

$$\hat{Y}_e = 0 \quad -3$$

أى أن البواقي مستقلة عن القيم المقدرة للمتغير التابع، حيث أن

$$\hat{Y}_e = (X\hat{\beta})'e = \hat{\beta}'X'e = 0$$

لأن  $X'e = 0$  وفقا للخاصية الثانية، وبشكل عام فإن هذه الخواص ما هى إلا الإمتداد الطبيعى للخواص الحسابية فى حالة الانحدار البسيط.

### 3/2/4 الخواص الإحصائية لتقديرات المربعات الصغرى

تحمل تقديرات المربعات الصغرى المتحصل عليها من النموذج

الخطى العام نفس الخصائص الإحصائية لنموذج الانحدار الخطى البسيط، أى

أنها تتميز بالخطية، عدم التحيز، الكفاية، وسوف نناقش ذلك كما يلى:

### 1- الخطية:

يمكن معرفة ما إذا النموذج خطى من خلال الصيغة (10-4) والتي تعرض المعلمات المقدرة

$$\hat{\beta} = (X'X)^{-1} X'Y$$

وبفرض أن:  $K = (X'X)^{-1} X'Y$

حيث K مصفوفة من الدرجة KXn تحتوى على ثوابت

$$\hat{\beta} = KY \quad (13-4)$$

ومن ثم فإن متجه التقديرات  $\hat{\beta}$  تعتمد بصورة خطية على متجه المتغير التابع Y.

### 1- عدم التحيز

تعتمد التقديرات  $\hat{\beta}$  لمعاملات النموذج بطريقة المربعات الصغرى، بصفة عدم التحيز، وهذا يعنى أن القيمة المتوسطة (الوسط) لكل معلمة فى المتجه تساوى قيمتها الحقيقة  $\beta$ .  
أى أن:

$$E(\hat{\beta}) = \beta$$

ويمكن إثبات ذلك كما يلى:

$$\hat{\beta} = (X'X)^{-1} X'Y$$

$$Y = X\beta + \mu$$

وبالتعويض عن  $y$  في  $\hat{\beta}$

$$\hat{\beta} = (X'X)^{-1} X' (X\beta + \mu)$$

$$\hat{\beta} = (X'X)^{-1} X'X \beta + (X'X)^{-1} X' \mu$$

حيث أن

$$(X'X)^{-1} X'X = I$$

$$E(\mu) = 0$$

$$\therefore E(\hat{\beta}) = \beta + (X'X)^{-1} X'E(\mu)$$

$$\therefore E(\hat{\beta}) = \beta$$

وتوضح هذه النتيجة أن وسط  $\hat{\beta}$  هو  $\beta$ . ومن ثم تكون  $\hat{\beta}$  تقدير غير متحيز لمعاملات المجتمع الحقيقية  $\beta$ . هذا ويمكن الحصول على تباين وتغاير  $\hat{\beta}$  كما يلي:

نأخذ مصفوفة التباين والتغاير لـ  $\hat{\beta}$  الشكل التالي:

$$COV(\hat{\beta}) = E \{ \hat{\beta} - E(\hat{\beta})(\hat{\beta} - E(\hat{\beta}))' \} \dots\dots\dots (14-4)$$

$$COV(\hat{\beta}) = E \{ \hat{\beta} - \beta)(\hat{\beta} - \beta)' \}$$

$$COV(\hat{\beta}) = E \left[ \begin{bmatrix} \hat{\beta}_1 - \beta_1 \\ \hat{\beta}_2 - \beta_2 \\ \vdots \\ \hat{\beta}_K - \beta_K \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{\beta}_1 - \beta_1 & \hat{\beta}_2 - \beta_2 & \hat{\beta}_K - \beta_K \end{bmatrix} \right]$$

$$= \begin{bmatrix} E(\hat{\beta}_1 - \beta_1)^2 & E(\hat{\beta}_1 - \beta_1)(\hat{\beta}_2 - \beta_2) & E(\hat{\beta}_1 - \beta_1)(\hat{\beta}_k - \beta_k) \\ E(\hat{\beta}_1 - \beta_1)(\hat{\beta}_1 - \beta_1)^2 & E(\hat{\beta}_2 - \beta_2) & E(\hat{\beta}_2 - \beta_2)(\hat{\beta}_k - \beta_k) \\ E(\hat{\beta}_k - \beta_k)(\hat{\beta}_1 - \beta_1)^2 & E(\hat{\beta}_k - \beta_k)(\hat{\beta}_k - \beta_k) & E(\hat{\beta}_k - \beta_k)^2 \end{bmatrix}$$

$$COV(\hat{\beta}) = \begin{bmatrix} Var(\hat{\beta}_1) & COV(\hat{\beta}_1, \hat{\beta}_2) & COV(\hat{\beta}_1, \hat{\beta}_k) \\ COV(\hat{\beta}_2, \hat{\beta}_1) & Var(\hat{\beta}_2) & COV(\hat{\beta}_2, \hat{\beta}_k) \\ COV(\hat{\beta}_k - \hat{\beta}_1) & COV(\hat{\beta}_k - \hat{\beta}_2) & Var(\hat{\beta}_k) \end{bmatrix}$$

$$COV(\hat{\beta}) = \sigma^2 \mu \begin{bmatrix} (X'X)^{-1}_{11} & (X'X)^{-1}_{12} & (X'X)^{-1}_{1k} \\ (X'X)^{-1}_{21} & (X'X)^{-1}_{22} & (X'X)^{-1}_{2k} \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ (X'X)^{-1}_{k1} & (X'X)^{-1}_{k2} & (X'X)^{-1}_{kk} \end{bmatrix}$$

حيث يقع تباين التقديرات  $\hat{\beta}$  على القطر الرئيسي للمصفوفة، ويقع  
تغاير التقديرات  $\hat{\beta}$  خارج القطر الرئيسي لها.  
ويمكن برهان مصفوفة التباين والتغاير كما يلي:

$$COV(\hat{\beta}) = E\{(\hat{\beta} - \beta)(\hat{\beta} - \beta)'\}$$

حيث أن:

$$\hat{\beta} = \beta + (X'X)^{-1}X'\mu$$

$$(\hat{\beta} - \beta) = (X'X)^{-1}X'\mu \dots\dots\dots (16-4)$$

وبالتعويض بالصيغة رقم (16-4) فى الصيغة رقم (15-4) فإن:-

$$\begin{aligned} \text{COV}(\hat{\beta}) &= E\{(X'X)^{-1}X'\mu)(X'X)^{-1}X'\mu)'\} \\ \text{COV}(\hat{\beta}) &= E\{(X'X)^{-1}X'\mu\mu'X(X'X)^{-1})'\} \\ \text{COV}(\hat{\beta}) &= (X'X)^{-1}X'E(\mu\mu')X(X'X)^{-1} \\ \text{COV}(\hat{\beta}) &= (X'X)^{-1}X'\sigma^2\text{In. } X(X'X)^{-1} \\ \text{COV}(\hat{\beta}) &= \sigma^2(X'X)^{-1}X'X(X'X)^{-1} \\ \text{COV}(\hat{\beta}) &= \sigma^2(X'X)^{-1} \end{aligned} \quad (17-4)$$

وبلاحظ أن:-

$$(X'X)^{-1}X'X = I_k. \quad \text{مصفوفة الوحدة}$$

$$E(\mu\mu') = \sigma^2\text{In}$$

In مصفوفة الوحدة أيضا، ويمكن تجاهل هذه المصفوفة.

### 3. الكفاية

خاصية الكفاية تعنى أن تقدير المربعات الصغرى، له أقل تباين ممكن بالمقارنة بتقديرات أخرى أيضا تكون خطية و غير متحيزة، وهذا ما تحاول نظرية جاوس ماركوف إثباته، حيث تنص النظرية -كما سبق الإشارة إلى ذلك- أن تقديرات المربعات الصغرى، هي أفضل تقدير غير متحيز "Blue" "Best " Linear unbiased"، ولبرهان النظرية - نظرية جاوس ماركوف - نفترض تقدير آخر ثم نقارن بين هذا التقدير وتقديرات المربعات الصغرى كما يلي:-

بفرض التقدير  $\hat{\beta}$  لمعاملات المجتمع  $\beta$  كما يلي:

$$\hat{\beta} = \{(X'X)^{-1}X' + D\} Y \dots\dots\dots (18-4)$$

حيث أن D مصفوفة من درجة kxn تحتوى على ثوابت (أوزان)

$$D=0$$

ويمكن تحديد عدم تحيز  $\hat{\beta}$  كما يلي:-

$$\hat{\beta} = \{(X'X)^{-1}X' + D\} Y$$

$$\hat{\beta} = \{(X'X)^{-1}X' + D\} (Y\beta + \mu)$$

$$\hat{\beta} = \{(X'X)^{-1}X'X\beta + (X'X)^{-1}X'\mu + DX\beta + D\mu$$

$$E(\hat{\beta}) = \beta + (X'X)^{-1}XE(\mu) + DX\beta + DE(\mu)$$

$$E(\mu) = 0$$

∴

$$E(\hat{\beta}) = \beta + DX\beta$$

وكذلك:

$$DX=0$$

$$E(\hat{\beta}) = \beta \quad \dots\dots\dots (19-4)$$

وهذا يعنى أن تقديرات  $\hat{\beta}$  هي تقديرات غير متحيزة للمعلمة  $\beta$  تحت شرط  $DX=0$  ، ولتحديد تباین  $\hat{\beta}$  نحصل على مصفوفة التباين والتغاير للتقدير  $\hat{\beta}$  ، كما يلي:

$$COV(\hat{\beta}) = E\{(\hat{\beta} - E(\hat{\beta}))(\hat{\beta} - E(\hat{\beta}))'\} \quad (20-4)$$

$$COV(\hat{\beta}) = E\{(\hat{\beta} - \beta)(\hat{\beta} - \beta)'\} \quad (20-4)'$$

وعلى اعتبار أن:-

$$\hat{\beta} = \beta + (X'X)^{-1} X'\mu + D\mu$$

$$DX = 0 \quad \text{و}$$

بالتعويض فى الصيغة رقم (20-4)

$$COV(\hat{\beta}) = E\{[(X'X)^{-1}X'\mu + D\mu][((X'X)^{-1}X'\mu + D\mu)']\}$$

$$COV(\hat{\beta}) = E[(X'X)^{-1}X'\mu + D\mu][\mu'(X'X)^{-1} + \mu'D']\}$$



$$\text{COV}(\hat{\beta}) = E[(X'X)^{-1}X'\mu\mu'X(X'X)^{-1} + (X'X)^{-1}X'D\mu\mu'D' + D\mu\mu'X(X'X)^{-1} + D\mu\mu'D']$$

$$\text{COV}(\hat{\beta}) = \sigma^2(X'X)^{-1}X'X(X'X)^{-1} + \sigma^2(X'X)^{-1}X'D' + \sigma^2DX(X'X)^{-1} + \sigma^2DD'$$

وباستعمال الشرط:

$$DX = 0 = X'D'$$

$$\text{COV}(\hat{\beta}) = \sigma^2(X'X)^{-1} + \sigma^2 DD' \quad (21-4)$$

معنى ذلك من الصيغة رقم (17-4) نجد أن:-

$$\text{COV}(\hat{\beta}) = \text{COV}(\hat{\beta}) + \sigma^2 DD'$$

أى أن:

$$\text{COV}(\hat{\beta}) = \text{COV}(\hat{\beta}) - \sigma^2 DD'$$

وحيث أن  $DD'$  مصفوفة موجبة مؤكدة إذا  $\text{COV}(\hat{\beta}) < \text{COV}(\hat{\beta})$

وبالتالى فإن تقديرات المربعات الصغرى تتسم بالكفاية، وأنها أحسن تقدير خطى غير متحيز. كما تنص نظرية جاوس ماركوف.

### 3/4 الاختبارات الإحصائية

سوف نناقش فى هذا الجزء من الفصل الرابع، اختبارات المعنوية

لمعاملات النموذج، إنشاء فترات الثقة لها، جودة توفيق النموذج، القدرة التفسيرية للمتغيرات المستقلة.

### 1/3/4. اختبارات المعنوية لمعاملات $\hat{\beta}$

نستخدم تباين التقديرات  $\hat{\beta}$  في إجراء اختبارات المعنوية والفروض، حيث تباين المعلمات  $\hat{\beta}$ .

$$\text{COV}(\hat{\beta}) = \sigma^2(X'X)^{-1} \dots\dots\dots (17-4)$$

غير أن التباين يحتوى على معلمة مجهولة القيمة  $\sigma^2$ . ويمكن استخدام تقدير غير متحيز لها وهو تباين البواقي كما يلي:-

$$\sigma^2 = \frac{\sum_{i=1}^n e_i^2}{n - k} \dots\dots\dots (22 - 4)$$

مجموع مربعات البواقي	$\sum_{i=1}^n e_i^2$
----------------------	----------------------

عدد المشاهدات	n
---------------	---

عدد المتغيرات	k
---------------	---

وعلى اعتبار أن

$$\sum_{i=1}^n e_i^2 = e'e$$

وبالتعويض فى المعادلة رقم (22-4) نحصل على الصيغة التالية:

$$\sigma^2 = \frac{e'e}{n - k} = \frac{(Y - X\hat{\beta})(Y - X\hat{\beta})}{n - k} \dots\dots\dots (23 - 4)$$

على اعتبار أن  $E(\hat{\sigma}^2) = \sigma^2$   
ويمكن استخدام صيغة أخرى لـ  $\sigma^2$  كما يلي:

$$e'e = Y'Y - 2\hat{\beta}'X'Y + \hat{\beta}'X'X\hat{\beta} \dots\dots\dots(24-4)$$

وعلى اعتبار أن المعادلة الطبيعية

$$X'Y = X'X\hat{\beta}$$

يمكن إعادة كتابة المعادلة رقم (23-4) كما يلي:

$$e'e = Y'Y - 2\hat{\beta}'X'Y + \hat{\beta}'X'Y$$

$$e'e = Y'Y - \hat{\beta}'X'Y$$

وبالتعويض في المعادلة رقم (23-4) نحصل على:-

$$\hat{\sigma}^2 = \frac{Y'Y - \hat{\beta}'X'Y}{n - k} \dots\dots\dots(25-4)$$

ويمكن استخدام صيغة رابعة:

$$\hat{\sigma}^2 = \frac{Y'Y - \hat{\beta}'X'Y}{n - k} \dots\dots\dots(26-4)$$

وبالتعويض عن  $\hat{\beta}$  في انبسط

$$\hat{\sigma}^2 = \frac{Y'Y - \hat{\beta}'X'Y}{n-k} = \frac{Y'Y - Y'X(X'X)^{-1}X'Y}{n-k}$$

وعليه فإن أيا من الصيغ التالية يقود إلى النتيجة نفسها:

$$\begin{aligned}\hat{\sigma}^2 &= \frac{e'e}{n-k} = \frac{(Y - X\hat{\beta})'(Y - X\hat{\beta})}{n-k} \\ &= \frac{Y'Y - \hat{\beta}'X'Y}{n-k} = \frac{Y'Y - \beta'X'X\hat{\beta}}{n-k} \\ &= \frac{Y'Y - Y'X(X'X)^{-1}X'Y}{n-k}\end{aligned}$$

ولإجراء اختبارات المعنوية على المعلمات المقدرة، لابد من إضافة  
الفرض الخاص بالتوزيع الطبيعي لقيم  $\mu$ :

$$\mu \sim N(0, \sigma^2 I_n)$$

وبناء على هذا الفرض وعلى اعتبار أن  $Y$  تعتمد على المتغير العشوائي، فإن قيمة  $Y$  موزعة حسب التوزيع الطبيعي:

$$Y \sim N(X\beta, \sigma^2 I_n)$$

على اعتبار أن وسط  $Y$  يمكن الحصول عليه كما يلي:

$$Y = X\beta + \mu$$

$$E(Y) = E(X\beta) + E(\mu)$$

$$E(Y) = X\beta + E(\mu)$$

$$E(Y) = X\beta$$

ويتبين  $Y$  يمكن الحصول عليه كما يلي:

$$\text{COV}(Y) = E(Y - X\beta)(Y - X\beta)'$$

$$= E(\mu\mu')$$

$$= \sigma^2 I_n$$

كما أن قيمة التقديرات  $\hat{\beta}$  لها توزيع طبيعي، على اعتبار أنها دالة في متجه المتغير التابع لها  $Y$  العشوائي الطبيعي.

$$\hat{\beta} \sim N(\beta, \sigma^2(X'X)^{-1})$$

وهذا يعني أن كل عنصر من  $\hat{\beta}$  من عناصر متجه التقديرات  $\hat{\beta}$  له التوزيع الطبيعي يوسط يساوي العنصر المقابل لـ  $\beta$  من متجه المعلومات الحقيقية  $\beta$  وتبين يساوي مضروب  $\sigma^2$  بالعنصر المقابل على قطر المصفوفة  $(X'X)^{-1}$  أي أن:-

$$\hat{\beta}_j \sim N(\beta_j, \sigma^2(X'X)^{-1}_{jj})$$

حيث أن  $\sigma^2(X'X)^{-1}_{jj}$  هو العنصر رقم  $j$  في قطر مصفوفة التباين والتغاير الخاصة بـ  $\hat{\beta}$ . وعلى اعتبار أن  $\sigma^2$  مجهولة فإنه يجرى استعمال تباين البواقي  $\hat{\sigma}^2$  السابقة لنحصل على إحصائية  $t$  المعتادة.

$$t^* = \frac{\hat{\beta}_j - \beta_j}{S.e(\hat{\beta}_j)} \dots\dots\dots (27 - 4)$$

حيث أن:

$$S.e(\hat{\beta}_j) = \sqrt{Var(\hat{\beta}_j)}$$

$$S.e(\hat{\beta}_j) = \sqrt{\hat{\sigma}^2 (X'X)^{-1}_{jj}} = \hat{\sigma} \sqrt{(X'X)^{-1}_{jj}}$$

وتستعمل هذه الإحصائية لإجراء اختبارات الفروض لكل معلمة  $\beta_j$  على حدة، حيث يكون:

$$H_0 : \beta_j = \beta_0 = 0 \quad \text{فرض العدم}$$

$$H_1 : \beta_j \neq \beta_0 \neq 0 \quad \text{الفرض البديل}$$

ونقارن  $t^*$  مع  $t$  الجدولية بدرجات حرية " $n-k$ " ثم نقرر قبول الفرض العدم أو البديل. ويمكن استخدام الإحصاءات السابقة لإنشاء فترات الثقة للمعلمات المقدرة  $\hat{\beta}$ .

#### 2/3/4. إنشاء فترات الثقة:

من الصيغة رقم (4-27)، يمكن إنشاء فترة الثقة للمعاملات المقدرة

بالمتجهة  $\hat{\beta}$ ، كما يلي:-

$$t = \frac{\hat{\beta}_j - \beta_0}{S.e(\hat{\beta}_j)} = \frac{\hat{\beta}_j - 0}{S.e(\hat{\beta}_j)} = \frac{\hat{\beta}_j}{S.e(\hat{\beta}_j)}$$

$$t = \frac{\hat{\beta}_j - \beta_0}{\sigma^2 \sqrt{(X'X)^{-1}_{jj}}} \sim tn - k$$

وعند مستوى معنوية معين %c نحصل على فترة الثقة للمعلمة  $\beta_j$

كما يلي:

$$\hat{\beta}_j \pm t_{c/2} S.e(\hat{\beta}_j)$$

$$\hat{\beta} \pm t_{c/2} \sigma^2 \Lambda = \sqrt{(X'X)^{-1}} \dots \dots \dots (28 - 4)$$

### 3/3/4 جودة التوفيق وجدول تحليل التباين "ANOVA"

تستخدم الإحصاء F لاختبار جودة توفيق النموذج الخطى العام وتعتمد F على المعادلة التالية والتي تحدد مصادر التباين الإجمالى ومجموع المربعات اللاحقة بها:

$$TSS = ESS + RSS$$

ويمكن تعريف مجاميع المربعات السابقة فى النموذج الخطى العام كما يلى:  
1- مجموع المربعات الكلى TSS. يعرف بأنه مجموع مربعات انحرافات قيم المتغير التابع Y عن وسطه الحسابى  $\bar{Y}$  أى أن:

$$TSS = \sum_{i=1}^n y_i^2 = \sum_{i=1}^n y_i^2 - n \bar{Y}^2$$
$$= Y'Y - n \bar{Y}^2$$

2- مجموع مربعات الإنحدار ESS، يعرف بأنه مجموع مربعات انحرافات قيم  $\hat{Y}$  ، وعلى اعتبار أن:

$$TSS = ESS + RSS$$

$$ESS = TSS - RSS$$

$$ESS = (Y'Y - n \bar{Y}^2) - (Y'Y - \hat{\beta}'X'Y)$$



\_\_\_\_\_ الفصل الرابع \_\_\_\_\_ نموذج الانحدار الخطى المتعدد

$$ESS = Y'Y - n\bar{Y}^2 - Y'Y - \hat{\beta}'X'Y$$

$$ESS = \hat{\beta}'X'Y - n\bar{Y}^2$$

3- مجموع مربعات الانحدار  $RSS$ . يعرف بأنه مجموع مربعات انحرافات قيم  $Y$  عن  $\bar{Y}$

$$RSS = TSS - ESS$$

$$\sum_{i=1}^n e_i^2 = e'e$$

هذا ويستخدم اختبار  $F$  فى اختيار فرض العدم والذى يعنى أن جميع معاملات الانحدار فى العلاقة الحقيقية فى المجتمع تساوى صفر

$$H_0 : \beta_2 = \beta_3 = \dots \dots \dots \beta_k = 0$$

كذلك الفرض البديل والذى يعنى بأن واحدة من هذه المعلمات على الأقل قيمتها لا تساوى صفر. ويمكن حساب  $F$  لاختبار الفروض السابقة من خلال جدول تحليل التباين كما يلى:

جدول تحليل التباين

ANOVA

البيان مصدر التغير	درجات الحرية	مجموع المربعات	متوسط مجموع المربعات	Fc
الانحدار	k-1	ESS	$\frac{ESS^*}{K-1}$	$FC = \frac{*}{**}$
البواقي	n-k	RSS	$\frac{RSS^{**}}{K-1}$	
الكلى	n-1	TSS		

$$F_c = \frac{ESS/K - 1}{RSS/n - k} \quad F(K - 1, n - k, \varepsilon)$$

حيث أن  $F_c$  هي قيمة  $F$  المحسوبة من جدول تحليل التباين، والتي تساوى متوسط مربعات الانحدار مقسوماً على متوسط مربعات البواقي. وبمقارنة  $F_c$  المحسوبة بقيمة  $F$  الجدولية بدرجات حرية  $(K-1)$  للبسط،  $(n-k)$  للمقام ومستوى معنوية معين يمكن قبول أو رفض الفرض العدم.

$$F_c \geq F_{(K-1, n-k, \varepsilon)} \text{ فإذا كانت}$$

نرفض الفرض العدم بمستوى معنوية  $\varepsilon$  ، بمعنى يكون هناك انحداراً خطياً معنوياً بين المتغير التابع  $Y$  ومجموعة المتغيرات التفسيرية  $X_k$ .

$$F_c \geq F_{(K-1, n-k, \varepsilon)} \text{ أما إذا كانت}$$

فإننا نقبل الفرض العدم بمعنى أنه لا يوجد انحدار خطى بين  $Y$  ومجموعة المتغيرات التفسيرية  $X_k$  بمستوى معنوية  $\varepsilon$ .  
هذا وقد يكون مناسباً في بعض الأحيان أن نعبر عن قيمة  $F_c$  المحسوبة بدلالة معامل التحديد  $R^2$  كما يلي:

$$F_c = \frac{R^2}{1 - R^2} \left( \frac{n - k}{k - 1} \right)$$

وتتبع نفس الخطوات السابقة لاختبار فرض العدم  $H_0$ .

#### 4/3/4- معامل التحديد المتعدد $R^2$ ومعامل التحديد المعدل $\bar{R}^2$

يعرف معامل التحديد  $R^2$  بأنه مربع معامل الارتباط المتعدد بين المتغير التابع  $Y$  ومجموع المتغيرات التفسيرية  $X_k$ . أو هو النسبة بين مجموع مربعات الإنحدار ومجموع المربعات الكلى. وعلى ذلك فإن:

$$R^2 = \frac{ESS}{TSS} = \frac{\hat{\beta}' X' Y - n \bar{Y}^2}{Y' Y - n \bar{Y}^2} \dots \dots \dots (29 - 4)$$

إلا أنه يعاب على  $R^2$  ، لأنه يتزايد دائما مع تزايد عدد المتغيرات المستقلة، وذلك بغض النظر عما إذا كانت تلك المتغيرات تلعب أو لا تلعب دوراً في تفسير تغيرات  $Y$ . ولذلك يفضل استخدام معامل التحديد المعدل  $\bar{R}^2$  للتخلص من هذا القصور.

$$\bar{R}^2 = 1 - \frac{(n-1)}{n-k} (1 - R^2) \dots \dots \dots (30 - 4)$$

$$\bar{R}^2 > R^2 \quad \text{وبشكل عام:}$$

وكلما زاد عدد المشاهدات  $n$  بصورة كبيرة فإن

$$\bar{R}^2 \approx R^2$$

كما يمكن أن يتخذ  $\bar{R}^2$  قيماً سالبة أحياناً.

## الفصل الخامس

مشاكل النماذج القياسية

الكشف ، الآثار ، العلاج



يواجه الباحث عند استخدامه للنماذج القياسية (نموذج الانحدار الخطي) لتحديد معالم النموذج أو البارامترات الخاصة بنموذجة لبعض المشكلات القياسية، والتي يكون لها آثار غير مرغوبة في عملية التفسير والتنبؤ. وتنتج عن إهمال أو سقوط أحد الفروض الأساسية بطريقة المربعات الصغرى.

وتمثل أهم هذه الفروض في:-

1- "النموذج المحدد في الدراسة .

$$Y_i = \alpha + \beta_1 X_{1i} + \beta_2 X_{2i} + \dots \dots \dots \beta_n X_{ni} + \mu_i$$

2- المتغير العشوائي ( $\mu$ ) توقعه بصفر  $E(\mu) = 0$

3- تباين المتغير العشوائي ثابت ومتجانس في كل فترة، ولكل قيمة لـ ( $x$ )

$$\text{Var}(\mu) = \delta \mu^2$$

4- التباين بصفر بشرط أن  $i \neq j$

$$\text{Cov}(\mu_i, \mu_j) = E(\mu_i, \mu_j) = 0$$

**فروض خاصة بالمتغيرات الأخرى:-**

1- المتغير المستقل ( $x$ ) يأخذ قيمة ثابتة في المشاهدات المتكررة، ومن ثم ( $x, \mu$ ) غير مرتبطة معا.

$$\text{Cov}(x_i, \mu_i) = E(x_i, \mu_i) = xE(\mu) = 0$$

2- المتغير العشوائي له توزيع طبيعي توقعه بصفر وتباينه ثابت  $\sigma^2$ .

$$\mu_i \sim N(0, \sigma^2)$$

وترجع أهمية هذا الفرض بشكل خاص إلى أنه لا يمكن استخدام الصيغ المعيارية للتوزيع (t) أو التوزيع (F) بدون هذا الفرض. على الرغم من أنه يمكن إثبات أن تقدير المربعات الصغرى للمعلمات تكون غير متهيزة بالإضافة إلى كونها متسقة.

ولحسن الحظ- فنظرية النهايات المركزية تمدنا باستخدامات هامة لبعض المقاييس الإحصائية والتي يمكن استخدامها لتحسين التقديرات، ويقوم الاقتصاديين القياسيين باستخدامها. فمثلا يمكن استخدام أحد الاختبارات المباشرة لحساب ما يعرف بالبواقي المعيارية في الانحدار المتعدد، فنقوم بقسمة الباقي الخاص بكل مشاهدة على الخطأ المعياري للانحدار، فإذا كان الخطأ يتبع التوزيع الطبيعي فإن توزيع البواقي المعيارية يتبع هو الآخر التوزيع الطبيعي، أو بشكل عام إذا لم نستطع تحويل التوزيع الذي نتعامل معه إلى الشكل الطبيعي، يمكن استخدام توزيع آخر مع مراعاة أننا سوف نستخدم أسلوب آخر للتقديرات واختبارات إحصائية بديلة عن تلك التي كانت موجودة مع التوزيع الطبيعي، أما بالنسبة للفرض الثالث المتعلق بثبات التباين للخطأ العشوائي، فإنه شرط هام فعدم تواجده يعنى أن تقديرات المربعات الصغرى سوف تفقد خاصية الكفاءة. وسوف نقوم بعرض أهم مشكلات القياس بالنماذج القياسية.

### 1/5- عدم ثبات تباين الخطأ العشوائي "Hetero Scedasticity"

يشير اختلاف التباين أو عدم ثبات التباين إلى الحالة التي يكون فيها تباين حد الخطأ غير ثابت عند كل قيم المتغير المستقل أى أن:-

$$E(X_i\mu_i) \neq 0 \text{ وعليه فإن } E(\mu_i)^2 \neq \sigma^2\mu$$

وهذا يعارض الفرض الثالث لنموذج انحدار OLS. ويحدث هذا في البيانات المقطعية. فعند دراسة العلاقة بين دخل الأسرة وإنفاقها قد يحدث أن يكون تباين الخطأ العشوائي في الأسر ذات الدخل المرتفع أعلى منه في الأسر ذات الدخل المنخفض، ومن هنا فإن الإنفاق الاستهلاكي للأسر ذات الدخل المرتفع سوف يكون التأثير نسبياً بالمقارنة بالأسر ذات الدخل المنخفض. ولا تحدث المشكلة المذكورة في دراسات السلاسل الزمنية، ويرجع هذا إلى أن معظم المتغيرات الاقتصادية تتأثر عبر الزمن بصورة متقاربة، فمثلاً كل من الاستهلاك الكلي والدخل الممكن التصرف فيه ينمو بنفس المعدل تقريباً خلال الزمن.

#### 1/1/5. الآثار المترتبة على اختلاف تباين الخطأ العشوائي:-

وينظر إلى اختلاف تباين الخطأ العشوائي باعتباره مشكلة بسبب:-

1- تقديرات معالم النموذج تظل غير متحيزة ومتسقة

$$\hat{\beta} = \frac{\sum X_i Y_i}{\sum x_i^2} = \frac{\sum X_i (\beta_i + \mu_i)}{\sum x_i^2} = \beta + \frac{\sum X_i \mu_i}{\sum x_i^2}$$

$$E(\hat{\beta}) = \beta + \frac{E(\sum x_i \mu_i)}{\sum x_i^2} = \beta$$

حيث أن  $E(\mu) = 0$

إلا أنها تكون غير كفاء مما يؤثر على جودة النموذج.



\_\_\_\_\_ الفصل الخامس \_\_\_\_\_ مشاكل النماذج القياسية (الكشف، الآثار، العلاج)

2- تقديرات التباين تكون متحيزة، مما يؤدي إلى اختبارات إحصائية غير صحيحة وفترات ثقة متحيزة.

### 2/1/5. الكشف عن مشكلة عدم ثبات التباين

يمكن الكشف عن مشكلة عدم ثبات التباين كما يلي:-

#### 1- استخدام الأشكال البيانية.

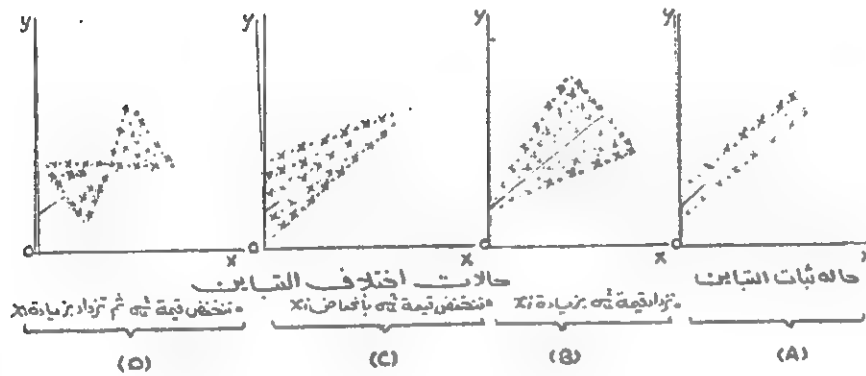
يمكن استخدام الأشكال البيانية للكشف عن عدم ثبات التباين كما فى

الشكل رقم (5-1):

#### شكل رقم (5-1)

يوضح حالة ثبات وعدم ثبات

تباين الخطأ العشوائى



2- للكشف عن مشكلة عدم ثبات التباين. يتم ترتيب البيانات من أصغر قيمة

إلى أكبر قيمة من قيمة المتغير المستقل  $x_i$  وإجراء انحداريين منفصلين

انحدار للقيم الصغيرة وانحدار آخر للقيم الكبيرة للمتغير  $x_i$  مع حذف

بعض المشاهدات (خمس المشاهدات مثلا). يختبر نسبة مجموع مربعات

\_\_\_\_\_ الفصل الخامس \_\_\_\_\_ مشاكل النماذج القياسية (الكشف، الآثار، العلاج)

الخطأ للانحدار الأول إلى مجموع مربعات الخطأ للانحدار الثاني  
(ESS<sub>1</sub>/ESS<sub>2</sub>) لنرى هل تختلف معنويًا عن الواحد.

ويستخدم توزيع (f) بدرجات حرية (n-d-2K)/2 حيث أن (n) إجمالي عدد المشاهدات (d) عدد المشاهدات المحذوفة (k) عدد المعالم المقدرة: وهذا هو اختبار جولد فيلد كوانت لإختلاف التباين وهو مناسب للعينات الكبيرة (n ≥ 30) دون حذف المشاهدات الوسيطة، لكن قوته في اكتشاف التباين تكون أقل.

### 3/1/5 علاج مشكلة اختلاف التباين ((تصحيح عدم ثبات التباين)) "Corrections For Heteroscedasticity"

Known Variances

(1) التباينات المعروفة

في هذه الحالة نفترض أن التباينات المختلفة للخطأ العشوائي معروفة

$$\text{Var}(\mu_i) = \sigma^2_i$$

ومن ثم سنقوم باستخدام طريقة المربعات الصغرى المرجحة

"Weighted Least Squares" والتي نعرف أيضا بطريقة المربعات

الصغرى المعممة "Generalized Least Squares" وفيها....

$$Y_i = \hat{\alpha} + \hat{\beta} X_i + \mu_i$$

$$\alpha' = \bar{Y} - \hat{\beta} \bar{X}$$

$$\beta' = \frac{\sum x_i Y_i}{\sum x_i^2}$$

$$\sum (\mu_i)^2 = \sum [Y_i - \alpha' - \beta' x_i]^2$$

ويتم الترجيح في طريقة المربعات الصغرى كالتالى:-

يجب أولاً أن نتعرف على الهدف من استخدام طريقة المربعات الصغرى المرجحة والذي يتمثل فى تصغير حجم مربعات الأخطاء إلى أدنى حد ممكن أى إيجاد النهاية الصغرى للمقدار  $\sum (\mu_i^2)$  بعد إضافة الوزن الترجيحى، نحصل على التقدير المناسب بعد تصغير هذا المقدار  $\sum K_i \mu_i^2$  حيث أن:  $(K_i)$  تشير إلى الأوزان المرجحة لكل مشاهدة وهى تساوى:

$$K_i = \frac{1}{\sigma_i^2}$$

$$\sum K_i \mu_i^2 = \sum K_i (Y_i - \hat{\alpha} - \hat{\beta} X_i)^2$$

إذن

$$= \sum \left( \frac{y_i - \hat{\alpha} - \hat{\beta} X_i}{\sigma_i} \right)^2$$

وبالإستعانة بطريقة الفروق المرتبطة بالوسط الحسابى تكتب القيمة السابقة كالتالى:

$$\sum \left( \frac{y_i - \hat{\beta} \cdot x_i}{\sigma_i} \right)^2$$

ويمكن استنتاج قيمة  $\hat{\beta}$  وذلك بمفاضلة المقدار  $\sum K_i \mu_i^2$  بالنسبة لـ  $\hat{\beta}$  ومساواته بالصفر

$$\frac{\partial \sum K_i \mu_i^2}{\partial \hat{\beta}} = 2 \sum K_i (Y_i - \hat{\beta} x_i) x_i = 0$$

$$= \sum K_i (Y_i - \hat{\beta} x_i) x_i = 0$$

$$= \sum x_i x_i y_i - \hat{\beta} \sum K_i x_i^2 = 0$$

$$\therefore \hat{\beta} = \frac{\sum K_i x_i y_i}{\sum K_i x_i^2}$$

ومن ثم:

$$\therefore \hat{\beta} = \frac{\sum x_i y_i / \sigma_i^2}{\sum x_i^2 / \sigma_i^2}$$

إذن:-

$$\frac{\sum (X_i / \sigma_i) (y_i / \sigma_i)}{\sum (X_i / \sigma_i)^2} = \frac{\sum (x_i^* y_i^*)}{\sum (x_i^*)^2}$$

حيث أن:

$$(1) \quad x_i^* = X_i / \sigma_i$$

$$(2) \quad y_i^* = y_i / \sigma_i$$

ومن ثم يمكن استنتاج النموذج التالي:-

$$Y_i^* = \alpha^* + \beta_1 X_{1i}^* + \beta_2 X_{2i}^* \dots \beta_k X_{ki}^* + \mu_i^*$$

$$Y_i / \sigma_i = \alpha^* / \sigma_i + \beta_1 X_{1i} / \sigma_i + \beta_2 X_{2i} / \sigma_i + \dots \mu_i / \sigma_i$$

إذن :-

$$\text{Var}(\mu_i^*) = \text{Var}(\mu_i / \sigma_i)$$

$$= \frac{1}{\sigma_i^2} = \text{Var}(\mu_i) = \frac{\sigma_i^2}{\sigma_i^2} = 1$$

فهذا النموذج يحقق كافة الفروض المتعلقة بنموذج الانحدار بما فيها ثبات تباين الخطأ العشوائي، ويتضح ذلك من خلال دراسة طريقة المربعات الصغرى المرجحة بأسلوب المصفوفات.

#### طريقة المربعات الصغرى المرجحة بأسلوب المصفوفات:

حيث يمكن التعبير عن فرض ثبات التباين بطريقة المصفوفات على النحو التالي:

$$E(\mu\mu') = \sigma^2 I$$

حيث أن: (I) تشير إلى مصفوفة الوحدة.

ولكن في حالة إختلاف التباين فإننا نفترض أن:

$$E(\mu\mu') = \sigma^2 \Omega$$

وبلاحظ ان إختلاف التباين يحدث عندما يكون شكل الخطأ العشوائي

كالتالي:

$$\begin{bmatrix} \sigma_1^2 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_2^2 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_n^2 \end{bmatrix}$$

ويلاحظ إختلاف قيم تباين الخطأ العشوائى

$$\left[ \sigma_1^2, \sigma_1^2, \dots, \sigma_N^2 \right]$$

ونلاحظ أيضا أن  $Cov=0$ .

▪ **فالهدف الرئيسى لتقديرات المربعات الصغرى المعممة**

الحصول على تقدير للمتجه  $\hat{\beta}$  بأفضل صورة ممكنة. وذلك بالإستعانة بالمعلومات والتى سبق وإن حصلنا عليها من مصفوفة  $\Omega$ . وبفرض توافر فروض المربعات الصغرى فيما عدا فرض ثبات التباين، الأمر الذى يمكننا من الحصول على أفضل تقدير خطى غير متحيز، بجانب تحويل البيانات الأصلية ومن ثم تكون مصفوفة Var-Cov للخطأ العشوائى المحول  $\sigma^2 I$ ، وبمجرد تطبيق هذه القاعدة نحصل على النتائج المطلوبة.

والآن افترض أن  $(\Omega)$  هى مصفوفة ثابتة وموجبة، والمطلوب إثبات

الآتى:-

$$H\Omega H' = I$$

حيث أن:-  $(H)$  مصفوفة غير مفردة (nonsingular) من الدرجة  $N \times N$  \*

$$\Omega = H^{-1}(H')^{-1} = (H'H)^{-1}$$

$$\therefore \Omega^{-1} = H'H$$

فى حين أن المصفوفة (H) تستخدم فى التعبير عن النموذج الأصلي ككل:-

$$HY = Hx\beta + H\mu$$

$$Y'' = X''\beta + \mu''$$

حيث أن:-

$$(1) Y'' = HY$$

$$(2) X'' = HX$$

$$(3) \mu'' = H\mu$$

إذن:

$$E(\mu''\mu'') = E(H\mu\mu'H')$$

$$= \sigma^2 H\Omega H' = \sigma^2 I$$

ومن ثم تحسب تقديرات  $(\hat{\beta})$  كالتالى:-

$$\hat{\beta} = [(HX)'(HX)]^{-1}(HX)'(HY)$$

$$\therefore \hat{\beta} = [(X'H'Hx)^{-1}X'H'HY]$$

إذن:-

$$\hat{\beta} = [(X'\Omega^{-1}X)^{-1}X'\Omega^{-1}Y]$$

أما فيما يتعلق بمصفوفة التباينات والتغايرات فيمكن أن نتناولها

كالآتى:

### مصفوفة التباين والتغاير "Var-Cov"

$$\begin{aligned} E[(\hat{\beta} - \beta)(\hat{\beta} - \beta)'] &= \sigma^2(X'X)^{-1} \\ &= \sigma^2(X'H'HX)^{-1} \\ &= \sigma^2(X'\Omega^{-1}X)^{-1} \end{aligned}$$

ومن ثم يلاحظ أن طريقة المربعات الصغرى المعممة تتوافق مع تقديرات المربعات الصغرى الأصلية عندما تكون:-

$$(1) \quad \Omega = I$$

(2)

$$H = \begin{bmatrix} 1/\sigma_1 & 0 & 0 \\ 0 & 1/\sigma_1 & 0 \\ 0 & 0 & 1/\sigma/ \end{bmatrix}$$

لكن لسوء الحظ، هذا الأسلوب محدد جداً في تطبيقه حيث أن التباينات المختلفة للخطأ العشوائى ليست دائماً معروفة.

### (2) تباينات الخطأ والاختلاف المباشر مع المتغير المستقل:

فإذا كانت تباينات الخطأ العشوائى غير معروفة في حين أن، ليس هناك ما يمكننا من التعرف على شكل العلاقة بين تباينات الخطأ العشوائى والمتغيرات المستقلة من خلال شكل انتشار البيانات، تعنى هذه الحالة يجب أن نبحث عن مصدر آخر للمعلومات مع افتراض وجود علاقة بين تباينات الخطأ العشوائى والمتغيرات المستقلة.



بفرض أن معادلة الانحدار التي بها حالة عدم ثبات التباين هي..

$$Y_i = \alpha + \beta X_i + \mu_i$$

وإذا افترض (وكثيراً ما يحدث هذا) أن ...

$$\text{Var}(\mu_i) = C X_i^2$$

حيث (C) ثابت يختلف عن الصفر، فأنتنا بذلك قد نستطيع تصحيح

اختلاف التباين بقسمة أو بترجيح كل حد من حدود الانحدار على  $(X_i)$  وإعادة تقدير الانحدار باستخدام المتغيرات المحولة في حالة الانحدار من المتغيرين.

$$\frac{y_i}{X_i} = \frac{\alpha}{X_i} + \beta + \frac{\mu_i}{X_i}$$

ويصبح حد الخطأ المحول ثابت التباين

$$\text{Var}(\mu_i) = \text{var} \frac{\mu_i}{X_i} = \frac{1}{X_i^2} \text{var}(\mu_i) = C \frac{X_i^2}{X_i^2} = C$$

لكن يجب توخي الحرص في تفسير النتائج للانحدار المحول أو المرجح، فالأخطاء في المعادلة  $Y_i = \alpha + \beta X_i + \mu_i$  ثابتة التباين، ولذا فإن تقديرات OLS ليست فقط غير متحيزة ومتسقة، ولكنها أيضاً كفاء. وفي حالة الانحدار المتعدد، يقسم كل حد في الانحدار (أى يرجح) على المتغير المستقل (مثلاً  $X_{2i}$ ) والذي يظن أنه يرتبط مع حد الخطأ.

$$\frac{Y_i}{X_{2i}} = \frac{\alpha}{X_{2i}} + \beta_1 \frac{X_{1i}}{X_{2i}} + \beta_2 + \frac{\mu_i}{X_{2i}}$$

ويمكن أن نحدد بالنظر ما إذا كانت  $X_{2i}$ ،  $X_{1i}$  هي المرتبطة مع

$\mu_i$  برسم كل من  $X_{2i}$  و  $X_{1i}$  مقابل بواقي الانحدار.

مثال: توضيحي يتناول المشكلة سابقة الذكر:

### الإنفاق العائلي Housing Expenditures

نفترض وجود مجموعة من البيانات والتي توضح العلاقة بين الإنفاق السنوي والدخل والمأخوذة بأسلوب Cross Section لعينة من أربع عائلات وهي:

Group	Housing Expenditure					Income
1	1.8	2.0	2.0	2.0	2.1	5.0
2	3.0	3.2	3.5	3.5	3.6	10.0
3	4.2	4.2	4.5	4.8	5.0	15.0
4	4.8	5.0	5.7	6.0	6.2	20.2

بافتراض أن العلاقة بين الإنفاق والدخل يعبر عنها بالعلاقة

$$Y_i = \alpha + \beta X_i + \mu_i$$

حيث أن:

$Y_i$  هي الإنفاق العائلي

$X_i$  الدخل،

وكانت نتائج إحدار المربعات الصغرى هي:  $\hat{Y} = 0.89 + 0.237 X_i$

مع العلم أن..

$F=252.7$  \*  $R^2=0.93$  \* قيم (t) المعيارية هي

(4.4)(15.4) لكلا من  $\alpha$ ،  $\beta$  على الترتيب.

وبفحص البيانات سابقة الذكر نلاحظ وجود مشكلة عدم ثبات التباين.

حيث يكون من الممكن التغلب على هذه المشكلة والوصول إلى النموذج المحول وهو

$$\frac{Y_i}{X_i} = \alpha \frac{1}{X_i} + \beta + \mu_i$$

نتائج الانحدار تكون

$$\frac{Y_i}{X_i} = 0.249 + 0.7539 \frac{1}{X_i} \quad R^2=0.76 \quad F=58.7$$

وبلاحظ أن قيمة ( $R^2$ ) والتي تم قياسها في ظل الأوزان المرجحة أى طريقة المربعات الصغرى المرجحة أقل من قيمة ( $R^2$ ) والتي تم قياسها مع عدم وجود أوزان مرجحة، ونتيجة لذلك فإن قيمة ( $R^2$ ) الجديدة تفشل في إمدادنا بمقياس مفيد قد يستطيع الباحث من خلاله تحديد مدى جودة النموذج. ولهذا السبب، فإننا نلجأ إلى ما يعرف بالمعاملات المقدرة ذات الكفاءة وذلك لحساب بواقى الانحدار

$$e_i = Y_i - 0.7529 - 0.249X_i$$

**ومن ثم يكون لدينا اختبارين لقياس جودة توفيق النموذج:-**

- الأول: وفيه نستخدم الصيغة المعيارية ( $R^2$ ) وذلك لحساب  $1-ESS/TSS$ .
- الثانى: وفيه نستعين بالمعاملات المقدرة ذات الكفاءة ثم نقوم باستخدام مقياس جودة التقدير لمربع الارتباط البسيط بين  $\hat{Y}_i$  و  $Y_i$ .
- وإذا تم تطبيق أى من الاختبارات فى المثال السابق سيكون مقياس الجودة 0.92.

#### 4/1/5. اختبارات أخرى لعدم ثبات التباين

##### Test for Heteroscedosticity

فهناك العديد من الاختبارات الإحصائية التي يمكن إجراؤها لبحث هذه المشكلة، بالإضافة إلى ما سبق عرضه، وفي كل حالة سنحاول أن نختبر فرض عدم الذي يعنى أن:

$$\sigma_1^2 = \sigma_2^2 = \sigma_3^2 = \sigma_n^2$$

حيث أن: (n) عدد المشاهدات المواجهة للغرض البديل.

#### أولاً: إختبار جولد فيلدك – كواندت ColdFeld-Quandt Test

فى هذا الاختبار سوف نفترض أننا نتعامل مع نموذج ذو متغيرين، ونرغب فى اختبار فرض عدم لثبات التباين فى مقابل الفرض البديل.

$$\sigma_i^2 = CX_i^2$$

ومن ثم سنقوم بحساب خطى إنحدار بطريقة المربعات الصغرى..

- الخط الأول: لحسابه نقوم بإستخدام البيانات ذات العلاقة بالتباينات الصغيرة للخطأ.

- الخط الثانى: ولحسابه أيضا نقوم بإستخدام البيانات ذات العلاقة بالتباينات الكبيرة الخطأ.

#### خطوات هذا الاختبار:

فخطوات هذا الإختبار كما يترتب إجرائها كما يلي:

(1) نقوم بترتيب البيانات تصاعدياً حسب قيمة المتغير المستقل (X).

\_\_\_\_\_ الفصل الخامس \_\_\_\_\_ مشاكل النماذج القياسية (الكشف، الآثار، العلاج)

(2) نقوم بحذف عدد من المشاهدات الوسيطة (d) (خمسة عدد المشاهدات مثلاً).

(3) نقوم بتوفيق إنحدارين مستقلين الأول يتعلق بالبيانات المرتبطة بالقيم المنخفضة لـ (X) والإنحدار الثاني يتعلق بالقيم المرتفعة لـ (X) ، وكل إنحدار يتضمن  $(N-2)/2$  مشاهدة بدرجات حرية  $N-d/2-2$  ويجب أن تكون (d) صغيرة بشكل كافى وذلك لضمان أن درجات الحرية المتاحة سوف تعطى لنا التقدير المناسب لكل من الإنحدارين المستقلين.

(4) القيام بحساب قيمة بواقي المربعات المتعلقة بكل إنحدار ESS1 والذى يتعلق بالقيم المنخفضة، لـ (X) وكذلك ESS2 والذى تتعلق بالقيم المرتفعة (S).

(5) نفترض أن الخطأ العشوائى له توزيع طبيعى (ولا يوجد ارتباط سلسلى) وبالتالي فإن القيمة الإحصائية  $ESS_1/ESS_2$  سوف تكون موزعة مثل (F) مع وجود درجات حرية لكل من البسط والمقام مقدارها  $(N-d-4)/2$  ومن هنا يمكن رفض فرض العدم عند مستوى معنوية معين ولو أن "الأداة الإحصائية المحسوبة كانت كبيرة بالمقارنة بقيمة F".

وعلى هذا الأساس يمكن القول أن اختبار جولدفيلد اختبار يمكن تطبيقه بسهولة على النموذج الخطى العام وذلك من خلال عدد معين من المشاهدات المتعلقة بواحد من المتغيرات المستقلة. ومن ثم فدرجات الحرية بالنسبة للقيمة المحسوبة (F)  $(N-d-2k)/2$  حيث أن (K) تشير إلى عدد المتغيرات المستقلة فى النموذج، (d) تشير إلى المشاهدات المحذوفة.

لكن يؤخذ على هذا الاختبار. عدم وجود قاعدة يتم من خلالها تحديد عدد المشاهدات التي سيتم حذفها، ففي كثير من الأحيان يصعب تحديد تلك المشاهدات في حين أن تحديد تلك المشاهدات سواء لعدم أهميتها أو لارتباطها بالخطأ العشوائي، فإن ذلك سوف يؤدي إلى تحسين نوعية الاختبار.

### مثال: تطبيقي لاختبار جولدفيلد – كواندت

يمكن تطبيق هذا الاختبار على المثال الخاص بتحديد حجم الإنفاق العائلي، حيث يفترض أن البيانات التي تم الحصول عليها قسمت إلى عيّنتين الأولى لذوى الدخل المنخفض حيث قد يصل دخلهم إلى 5.000 دولار، 10.000 دولار والعينة الثانية تتضمن الأسر أصحاب الدخل المرتفع فقد يصل دخلهم إلى 10.000 و 20.000 دولار. "ليس هناك مشاهدات محذوفة أو مهمة"

والنتيجة التي حصلنا عليها من معادلتى الإنحدار المستقلتين كانت كالتالى:-

#### 1- Low Income Families:

$$Y_i = 0.600 + 0.276X_i \quad R^2=0.94 \quad Ess_1=0.3000$$

(3.1) (11.3)

#### 2- High-Income families:

$$Y_i = 1.54 + 0.20X_i \quad R^2=0.55 \quad Ess_2=2.024$$

(1.4) (3.1)

وهنا يمكن استخدام قيمة F المحسوبة لإختبار فرض ثبات التباين عن طريق القيمة  $Ess_2/Ess_1$  وهى تساوى 6.7 وتوزع مثل توزيع F بدرجات حرية لكل من البسط والمقام.

\_\_\_\_\_ الفصل الخامس \_\_\_\_\_ مشاكل النماذج القياسية (الكشف، الآثار، العلاج)

وحيث أن القيمة الجدولية الإنتقائية لتوزيع F عند مستوى معنوية 1% تكون 3.44 فإننا نقوم برفض الفرض العدمي في مقابلة الفرض البديل الذي يعنى عدم ثبات التباين.

### Breusch- Pagan Test

### ثانياً: اختبار بروش – باجان

وهذا الاختبار أبسط في تجريبيه وذلك مقارناً بالاختبار السابق، ويوضح هذا الاختبار من خلال النموذج الآتى:

$$Y_i = \alpha + \beta X_i + \mu_i$$

$$\sigma_i^2 = F(y + \theta z_i)$$

فهذا الإختبار يتضمن إفتراضات عامة عن العلاقة بين تباين الخطأ الحقيقى والمتغير المستقل (Z) فقيمة F تمثل الدالة العامة التى يمكن إستخدامها سواء فى الشكل الخطى أو اللوغاريتمى، (Zi) والتى قد تشير إلى المتغير المستقل (X) أو مجموعة المتغيرات المستقلة بالنسبة لـ (X). ولاختبار عدم ثبات التباين. نقوم بحساب بواقي المربعات الصغرى (ei) من معادلة الإنحدار  $Y_i = \alpha + \beta X_i + \mu_i$  فى نفس الوقت الذى نقوم فيه بإستخدام هذه البواقي لتقدير  $\hat{\sigma}^2$  وهى تساوى  $\hat{\sigma}^2 = \frac{\sum e_i^2}{N}$  ومن ثم فمعادلة الإنحدار تكتب كالآتى:

$$\frac{e_i^2}{\hat{\sigma}^2} = y + \sigma z_i + v_i$$

فإذا كان توزيع الخطأ العشوائى فى معادلة الانحدار  $Y_i = \alpha + \beta X_i + \mu_i$  يتبع توزيعاً طبيعياً، لأدى ذلك إلى إختفاء مشكلة عدم ثبات التباين، ولمعرفة نقوم بتصنيف قيمة الانحدار للمربعات  $Rss/2$  فتعطينا إختبار ملائم حيث أن:

$$Rss/2 \sim \chi^2_1$$

وبشكل عام كلما ارتفعت قيمة الانحدار للمربعات كلما إزداد ارتباط  $z$  مع تباين الخطأ، ونتيجة لذلك يرفض الفرض العدمى.  
ويستخدم اختبار pagan للتأكد من عدم ثبات التباين فى حالة المتغير المفرد، فإننا نقوم بتحويل المعادلة الأصلية بإستخدام المتغير  $Z$  على عكس المعادلة  $Y_i = \alpha + \beta X_i + \mu_i$ .

### **\*\* اختبار وايت The White Test**

قدم هذا الاختبار هال وايت، فقد قدم اختباراً لا يعتمد على شروط ضرورة تبعية الخطأ العشوائى للنوزيع الطبيعى، فهذا الشرط له أهميته الخاصة فى إختبار (برويش - باجان) إلا أنه ليس هاماً هنا ...  
وفترض هذا الإختبار إمكانية إستخدام بواقي الانحدار للوصول إلى المعادلة الآتية:-

$$e_i^2 = y + \sigma Z_i + V_i$$

فمن خلال هذا النموذج نقوم بحساب ( $R^2$ ) والتي تقودنا للتعرف على مدى جودة النموذج وعدمه يكون هناك ثبات للتباين تكون:

$$NR^2 \sim \chi^2$$



\_\_\_\_\_ الفصل الخامس \_\_\_\_\_ مشاكل النماذج القياسية (الكشف، الآثار، العلاج)

مع وجود درجة حرية واحدة، ومن الواضح أن اختبار كلا من (وايت وباجان) متماثلان إلى حد كبير، فكلاهما يمكن أن يكون اختبار تطبيقى. ويقترح وايت أنه فى حالة وجود علاقة وثيقة بين التباين والمتغير  $X$  فإنه لابد من استعمال المتغيرات  $X_1, X_2$  وذلك بهدف تحويل النموذج إلى الشكل غير الخطى. مع ضرورة مراعاة استعمال القيم  $Z^2, X^2$  بالإضافة  $XZ$  وذلك فى حالة وجود متغيرات مناسبة مثل  $Z, X$ .

### مثال تطبيقى لكلاً من اختبارى برويش – باجان ووايت

يمكن تطبيق تلك الاختبارات على مثال الإنفاق العائلى، لذلك وسوف نقوم بالتعبير عن عدم ثبات التباين بالصيغة التالية:-

$$\sigma_i^2 = y + \sigma X_i$$

ولكى نتمكن من تطبيق اختبار Breusch – Pagan نحصل أولاً على إنحدار  $Y/X$  ثم نقوم بحساب بواقى الانحدار متخذ أن  $\sigma_i^2 = 0.12523$  بالتالى يمكن الحصول على البواقى الطبيعية والتى بانحدارها على  $X$  نحصل على:-

$$\frac{e_i^2}{\sigma^2} = -0.853 + 0.148X_i + \hat{y}$$

أى أن قيمة إنحدار المربعات والذى يحسب من  $(R^2)$  يساوى 13.732 ولهذا السبب فالاختبار الإحصائى يكون  $RSS/2 = 6.866$ . وهو اختبار يتبع توزيع Chi-Square (كا تربيع (S)) بدرجة حرية 1 وطالما القيمة الجدولية لتوزيع Chi-square تكون 3.84 عند مستوى معنوية 5%، فإننا نقوم برفض الفرض العدمى، بالتالى يوجد عدم ثبات للتباين.

ولكن من الناحية الواقعية وجد أن اختبار White اختبار سهل التطبيق، فقيمة  $R^2$  المتعلقة بإنحدار البواقي تكون 0.36 وهى قيمة لا تتبع التوزيع الطبيعي.

و الواقع إن القيام بإضافة أى قيمة للمتغير التابع أو مضاعفة قيمته لا تؤثر على جودة توفيق النموذج، ولهذا السبب فإن الاختبار الإحصائى التقريبى يصبح  $20(R^2)=7.20$ .

فهذا الاختبار يتبع توزيع Chi-Square بدرجة حرية تساوى واحد ومرة أخرى نقوم برفض الفرض العدمى لثبات التباين حيث أن  $(7.20 > 3.84)$ .

وفى النهاية نقول أن اختبار White (أو اختبار Breusch-Pagan) يمكن تطبيقه بالنسبة لأى شكل دالى للمتغير  $X$  حيث نقوم بحساب إنحدار البواقي المربعة لـ  $X, X^2$ .

• فالنتائج التى تم الحصول عليها سجلت كالاتى:

$$e_i^2 = 0.922 - 0.0212X_i + 0.0016X_i^2$$

حيث أن:-

$$R^2 = 0.4130 \quad (1)$$

$$20(R^2) = 8.260 \quad (2) \text{ الاختبار الإحصائى التقريبى}$$

وهو توزيع Chi-Square بدرجة حرية تساوى 2، والقيمة الجدولية لتوزيع Chi-Square تساوى 5.99، ومن ثم نقوم برفض الفرض العدمى الذى يعنى ثبات التباين طالما  $(8.26 > 5.99)$ .

## 2/5 - الارتباط الذاتي Auto Correlation

إن أحد الافتراضات الهامة التي يقوم عليها نموذج الإنحدار الخطى هو استقلال قيم الخطأ العشوائى عن بعضها البعض، فإذا لم يتحقق هذا الافتراض فإننا نقول أن هناك ارتباط ذاتى بين قيم عنصر الخطأ العشوائى، ومن ثم فقيمة  $e_i$  فى فترة معينة ستكون مرتبطة بقيمتها فى الفترات السابقة ومثال على ذلك عندما نقوم بالتنبؤ بنمو العائد على السهم فإن المغالاة فى التقدير فى أحد السنوات سوف تؤدى إلى مغالاة فى التقدير فى السنوات التالية.

ويلاحظ أن الارتباط الذاتى من الممكن أن يكون سالب أو موجب، وسوف نهتم بحالة الارتباط الذاتى الموجب حيث يرتبط الخطأ العشوائى فى فترة معينة مع الخطأ فى الفترة السابقة أو القادمة ارتباطاً موجباً.

وعادة ما يحدث هذا النوع من الارتباط فى دراسات السلاسل الزمنية، حيث يؤدى حذف أو عدم إدخال بعض المتغيرات فى النموذج إلى ظهور الارتباط الذاتى الموجب. فمعظم المتغيرات الإقتصادية تميل إلى الارتباط بشكل متسلسل ومن الطبيعى أن يؤدى حذف متغير مترابط سلسلياً إلى إحداث ترابط متسلسل فى عنصر الخطأ العشوائى.

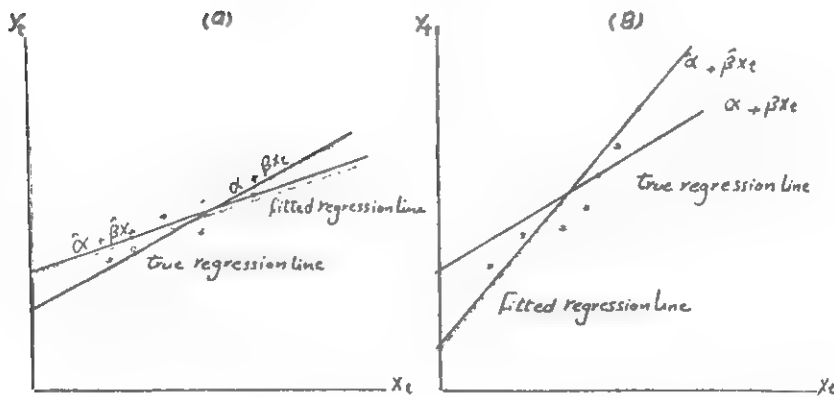
فقد تؤدى بعض المتغيرات العشوائية الطارئة إلى حدث ترابط فى قيم الخطأ العشوائى لعدة فترات - كالكوارث الطبيعية مثلاً، حيث يجب أن نلاحظ أن وجود هذه المشكلة لا يؤدى إلى فقدان خاصية عدم تحيز التقديرات، فتقديرات المربعات الصغرى المعتادة تظل غير متحيزة، وبعبارة أخرى "تظل تقديرات المربعات الصغرى خطية وغير متحيزة ومتسقة ولكن لا يكون لها أقل تباين". ومن ثم تفقد طريقة المربعات الصغرى خاصية الكفاءة.

\_\_\_\_\_ الفصل الخامس \_\_\_\_\_ مشاكل النماذج القياسية (الكشف، الآثار، العلاج)

فهذه المشكلة قد تحدث بشكل محدود جداً في الدراسات المبينة على البيانات المقطعية، الارتباط الذاتي عادة ما يكون تجمع لكل المتغيرات المهمة خاصة عندما تكون ذو درجة مرتفعة، ومما لا شك فيه أن هذا الأمر يؤثر على تقديرات المربعات الصغرى، حيث يتركز تأثيره في جعل الأخطاء المعيارية أقل بالمقارنة بالأخطاء المعيارية الحقيقية، وهو أمر يقودنا إلى إمكانية رفض الفرض العدمي عندما يكون صحيحاً، فهذه نقطة لا تحتاج إلى إثبات بقدر ما تحتاج إلى بعض التأمل.

ويمكن بيان ذلك من خلال دراسة الشكلين الآتيين حيث يشير إلى وجود ارتباط سلسلي في النموذج مع وجود متغير تفسيري واحد.

شكل رقم (2-5)  
يوضح الارتباط السلسلي الموجب



فكلا من الشكلين a, b يصوران حالة وجود الارتباط الذاتي الموجب، ففي الشكل (a) نلاحظ أن عنصر الخطأ العشوائي يرتبط مع المشاهدات الأولى بشكل موجبا، وهذا يؤدي إلى تسلسل أو تتابع عناصر الخطأ العشوائي فالأربع

## \_\_\_\_\_ الفصل الخامس \_\_\_\_\_ مشاكل النماذج القياسية (الكشف، الآثار، العلاج)

مشاهدات الأولى تكون موجبة والمشاهدتين الأخرتين سالبتين. وفي الشكل (b) لاحظ أنها حالة معاكسة تماماً للحالة الأولى فالأربع تقديرات الأولى للخطأ العشوائى تكون سالبة والمشاهدتين الأخرتين يكونا موجبتين.

ففى الحالة الأولى نجد أن الإنحدار المقدر يكون أقل من الإنحدار الحقيقى، بينما فى الحالة الثانية يكون الإنحدار المقدر أ من الإنحدار الحقيقى، ويبدو أنه من المعقول أن يكون تقدير الإنحراف بطريقة المربعات الصغرى سوف يكون صحيح فى المتوسط إذ أنه يكون غير متحيز.

وفى كل حالة من هاتين الحاليتين نجد أن خط الإنحدار المقدر بطريقة المربعات الصغرى قد عبر عن بيانات العينة بشكل أكثر دقة من خط الإنحدار الحقيقى، كذلك المربعات الصغرى سوف تؤدي إلى تقدير تباين الخطأ العشوائى بأقل من قيمته الحقيقية.

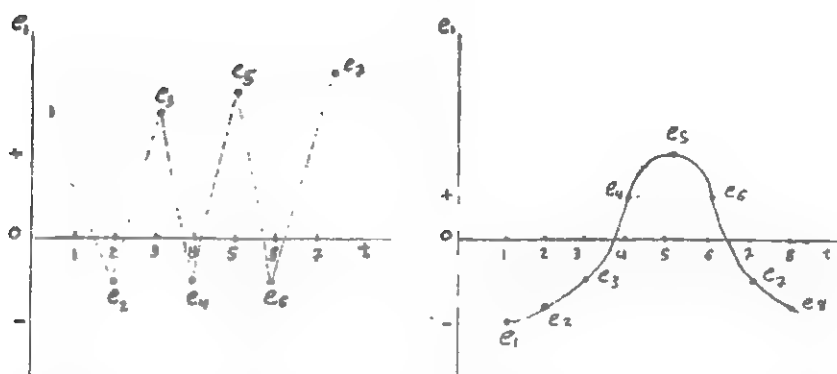
والخلاصة هنا (أنه عند وجود الارتباط الذاتى فى عنصر الخطأ العشوائى يكون هناك تحيز إلى أدنى درجة ممكنة Down word bias فى تقدير تباين المعلومات المقدرة باستخدام الصيغة المعتادة).

### • لكن تحديد طبيعة هذه المشكلة بشكل أكثر دقة لابد من توضيح الآتى:

إذا كان حد الخطأ فى فترة زمنية مرتبطاً بحد الخطأ فى الفترة الزمنية السابقة يكون هناك ارتباط ذاتى من الدرجة الأولى والذى تتضمنه معظم التطبيقات فى الإقتصاد القياسى بشكل أكثر من الدرجة الثانية، ويعنى الارتباط الذاتى الموجب من الدرجة الأدنى أن  $(F_{\mu\mu}-1>0)$  وهذا إخلال لغرض OLS وهذا شائع فى تحليل السلاسل الزمنية.

### شكل رقم (3-5)

#### يوضح الارتباط السلسلي الموجب



ارتباط ذاتي سالب من الدرجة الأولى  
(يظهر عندما تتغير إشارات البواقي  
المتتالية كثيراً)

ارتباط ذاتي موجب من الدرجة الأولى  
(يظهر عندما يكون لعدد من البواقي  
المتتالية نفس الإشارة)

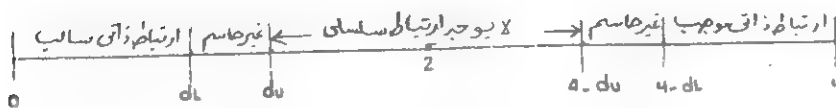
- ومن ثم يمكن تحديد طبيعة المشكلة في النقاط التالية والآثار المترتبة عليها:-
- بوجود الارتباط الذاتي تظل تقديرات OLS (غير متحيزة ومتسقة)، لكن الخطأ المعياري لمعالم الانحدار المقدرة تكون (متحيزة) مؤدية إلى الإختبارات إحصائية غير صحيحة وفترات ثقة متحيزة).
  - إذا كان الارتباط الذاتي من الدرجة الأولى موجباً تكون الأخطاء المعيارية المقدرة متحيزة إلى أسفل، ومن ثم يكون هناك مبالغة في الدقة في المعنوية الإحصائية لمعالم الانحدار المقدرة.

### الارتباط السلسلي وكيفية اختبار وجوده:

يحتبر وجود الارتباط الذاتي بحساب إحصائية (ديرين - واتسون)  $d$  والتي تعطى بشكل روتيني كأحد نواتج برامج الكمبيوتر مثل SPSS:-

$$d = \frac{\sum (e_i - e_{i-1})^2}{\sum e_i^2}$$

وتتراوح القيمة المحسوبة لـ  $d$  بين 0,4 ولا يكون هناك ارتباط سلسلي  $d$  قريبة من 2 .



قيم ( $d$ ) تشير إلى وجود أو غياب الارتباط الذاتي من الدرجة الأولى، والتي تجعل الاختبار غير حاسم وعندما يظهر المتغير التابع المبطل كمتغير مفسر في الانحدار، فإن تكون منحيزة نحو (2) وتضعف من قوتها في الكشف عن الارتباط الذاتي.

### **علاج مشكلة الارتباط الذاتي "تصحيح الارتباط المتسلسل"**

#### **Corrections for Serial Correlation**

نفترض أن كل عنصر من عناصر الخطأ العشوائي في نموذج الانحدار الخطي يتبع التوزيع الطبيعي بقيمة متوقعة تساوي صفر وتباين ثابت، لكن قيم الخطأ العشوائي ليست مستقلة عن بعضها البعض، ومن ثم

سوف نقوم باستخدام الرمز (t) بدلا من (i) وبافتراض أن الرقم الكلى للمشاهدات يكون (T) والنموذج بذلك يكون..

$$- Y_t = \alpha + \beta_1 X_{1t} + \beta_2 X_{2t} + \dots + \beta_k X_{kt} + \mu_t$$

$$- \mu_t = M\mu_{t-1} + V_t \quad 0 \leq |p| < 1$$

من العلاقة السابقة نفترض أن هناك ارتباطاً ذاتي من النوع البسيط حيث أن  $V_t$  موزعة توزيعاً طبيعياً بمتوسط يساوى الصفر وتباين  $\sigma_v^2$  أى أن  $(V_t \sim (0, \sigma_v^2))$  بالإضافة إلى استقلالها عن عناصر الخطأ العشوائى الأخرى خلال الزمن (أى أن  $V_t$  يتحقق بها مواصفات عنصر الخطأ العشوائى) فهي مستقلة عن قيمة  $\mu_t$  حيث أن  $\mu_t$  موزعة توزيعاً طبيعياً بمتوسط يساوى الصفر وتباين  $\sigma^2$  أى أن  $\mu_t \sim N(0, \sigma^2)$  فتلك القيمة غير مستقلة عن عناصر الخطأ العشوائى الأخرى.

فالمعادلة السابقة نابعة من القاعدة التى مقتضاها ان الخطأ فى فترة معينة "الفترة t" بتقليل قيمة الخطأ فى فترة ماضية "بالضرب \* P" ثم إضافة تأثير المتغير العشوائى، والذي كان له قيمة متوقعة تساوى الصفر وهذا ما يعرف بـ First-order autoregressive Process.

ويلاحظ انه من السهل ضبط تأثير الخطأ العشوائى فى أى فترة معطاة، بالتالى يمكن التأثير على قيمة الخطأ العشوائى والتى تم تصغيرها عبر الزمن، وذلك عن طريق تكبير هذه القيمة بالنسبة للفترات الزمنية المستقبلية، وسوف نقوم بحساب تغاير  $\mu_t$  فى كل الفترات الزمنية السابقة على النحو الآتى:



$$\text{Var}(\mu_t) = E(\mu_t^2) = [(m\mu_{t-1} + V_t)^2] = E(m^2\mu_{t-1}^2 + V_t^2 + 2m\mu_{t-1}V_t)$$

$$= m^2 E(\mu_{t-1}^2) + V_t^2 \quad \text{حيث أن } \mu, v \text{ مستقلين}$$

$$= m^2 \text{Var}(\mu_t) + \sigma_v^2$$

وتحل:

$$\sigma_v^2 = \text{Var}(\mu_t) - m^2 \text{Var}(\mu_t)$$

$$= m^2 (\mu_t)$$

$$\sigma_v^2 = \text{Var}(\mu_t) - (1 - m^2)$$

$$\text{Var}(\mu_t) = \frac{\sigma_v^2}{1 - m^2} = \sigma^2 \mu_t$$

$$\text{Cov}(\mu_t, \mu_{t-1}) = E(\mu_t \mu_{t-1}) = E[m\mu_{t-1} + V_t] \mu_{t-1}$$

$$= E(m\mu_{t-1}^2 + V_t \mu_{t-1}) = mE(\mu_{t-1}^2)$$

$$= m \text{var}(\mu_t) = m \sigma^2 \mu$$

والطريقة الملائمة

$$\text{Cov}(\mu_{t-1}, (\mu_{t-2})) = E(\mu_t \mu_{t-2}) = m^2 \sigma_\mu^2$$

$$\text{Cov}(\mu_t, (\mu_{t-3})) = E(\mu_t \mu_{t-3}) = m^3 \sigma_\mu^3$$

\_\_\_\_\_ الفصل الخامس \_\_\_\_\_ مشاكل النماذج القياسية (الكشف، الآثار، العلاج)

ويلاحظ أن قيمة المعامل  $m$  والذي يعبر عن معامل الارتباط يمكن حسابه من خلال الصيغة

$$m = \frac{\text{cov}(\mu_t, \mu_{t-1})}{\sigma_{\mu}^2} = \frac{\text{cov}(\mu_t, \mu_{t-1})}{[\text{var}(\mu_t)]^{1/2} [\text{var}(\mu_{t-1})]^{1/2}}$$

حيث أن:

$$\sigma_{\mu}^2 = \text{var}(\mu_t) = \text{Var}(\mu_{t-1})$$

فقيمة  $m$  تعبر عن معامل الارتباط بين الأخطاء في الفترة الزمنية  $(t)$  والأخطاء في الفترة  $(t-1)$  وعندما تساوى  $m$  الصفر فهذا يعنى عدم وجود حالة ارتباط ذاتى في حين أنه عندما تزداد قيمة  $m$  فإن هذا يدل على وجود الارتباط الذاتى وقد تزداد قيمة  $m$  وتصل إلى قيمتها العظمى وهى الواحد الصحيح.

وإذا كانت قيمة  $(m)$  معلومة فيكون من السهل تعديل طريقة المربعات الصغرى الأصلية للحصول على تقديرات ذات كفاءة للمعلومات، وهذا يتضمن ما يعرف بطريقة الفروق المعممة generalized differencing وهى تقوم على أساس تعديل النموذج الخطى إلى نموذج آخر تكون قيمة الأخطاء مستقلة بافتراض أن

$$Y_{t-1} = \alpha + \beta_1 X_{t-1} + \beta_2 X_{2t-1} + \dots \beta_k X_{kt-1} + \mu_{t-1}$$

وبضرب هذه المعادلة في  $m$  وطرحها من المعادلة

$$Y_t = \alpha + \beta_1 X_{t-1} + \beta_2 X_{2t} + \dots \beta_k X_{kt} + \mu_t$$

ومن ثم نحصل على المعادلة الآتية:

$$Y_t^* = \alpha(1-m) + \beta_1 X_t + \beta_2 X_{2t} + \dots \beta_k X_{kt} + V_t$$

حيث أن:

$$Y_t^* = Y_t - mY_{t-1} \quad Y_{2t}^* = Y_{2t} - mY_{2t-1}$$

$$Y_{kt}^* = Y_{kt} - mY_{kt-1} \quad V_t = \mu_t - m\mu_{t-1}$$

فهناك ثمة صعوبة تكتنف طريقة الفروق المعممة، فالمعادلة المحولة تظهر فقط عند الفترات الزمنية  $t, 2, 3, \dots$  وبإسقاط الفترة الزمنية الأولى من نتائج عملية الإنحدار. وعندما يكون هناك نقص في المعلومات لدينا، فهذا سوف يسبب نوع من الخلل داخل النموذج، والحل هنا يكون عن طريق أخذ الفترة الزمنية الأولى وعدم إهمالها يشترط أن نقوم بالآتي...

$$Y_i^* = \sqrt{1-m^2} y_i \quad X_{2i}^* = \sqrt{1-m^2} x_{2i} \dots X_{ki}^* = \sqrt{1-m^2} x_{ki}$$

ففي هذه الحالة قمنا باحتساب الفترة الأولى فإن تباين الخطأ العشوائى سوف يساوى كل التباينات فى الفترات الزمنية الأخرى.

$$\mu_i^* = (1-m^2)^{1/2} \mu_i, \quad \text{Var}(\mu_i^*) = (1-m^2) \text{Var}(\mu_i) = \sigma_v^2$$

فهذه الحالة يكون فيها معامل الارتباط أقل من الواحد فما الذى يحدث

حينما يتساوى قيمة معامل الارتباط مع الواحد الصحيح؟

فهذه الحالة فى حقيقة الأمر ذات فائدة خاصة لأنها تؤدى بشكل عام

إلى استخدام ما يعرف بإجراءات التقدير عن الفروق الأولى First

\_\_\_\_\_ الفصل الخامس \_\_\_\_\_ مشاكل النماذج القياسية (الكشف، الآثار، العلاج)

differencing وهذه الفروق تعد بمثابة إجراءات لحل المشكلة وذلك يكون عن طريق استخدام أسلوب يماثل عملية الفروق المعممة بالشكل الآتي:

$$Y_t = \beta_2 X_{2t}^* + \beta_3 X_{3t}^* + \dots + \beta_k X_{kt}^* + V_t$$

حيث أن:

$$Y_t^* = Y_t - Y_{t-1}$$

$$Y_{2t}^* = Y_{2t} - Y_{2t-1}$$

$$X_{kt}^* = X_{kt} - Y_{kt-1}$$

$$V_t = \mu_t - \mu_{t-1}$$

لكن هذه الطريقة تحتاج إلى مقدار ثابت، وقد تلاحظ أن هذا المقدار كان يمكن معرفته من خلال النموذج البسيط ذو المتغيرين من الصيغة  $(\hat{\alpha} = \bar{y} - \hat{\beta} \bar{x})$  لكننا قد يكون بإمكاننا التعرف على قيمة هذا المقدار عن طريق حل المعادلة الأصلية، وذلك بإيجاد قيم المتغيرات الموجودة في هذه المعادلة أي إيجاد القيمة المتوسطة لها.

إلا أن الطريقة المعممة قد تكون نافعة جداً في حالة معرفة قيمة  $m$ ، وذلك بعدة طرق لكل منها بعض المزايا وبعض العيوب، لكن على الرغم من ذلك قد تؤدي تلك الطرق إلى قياس المعلمات بالميزات المطلوبة وذلك عندما يكون حجم العينة كبير، لكن قد يصعب الوصول إلى المميزات المطلوبة في حالة العينات الصغيرة.

ويلاحظ وجود طرق أكثر صعوبة من السابقة والتي قد تكون بديل يتعلق بإيجاد الحد الأقصى للتقدير الإجمالي للمعلمات  $\alpha$ ،  $\beta$ ،  $\sigma_v^2$  وهي

\_\_\_\_\_ الفصل الخامس \_\_\_\_\_ مشاكل النماذج القياسية (الكشف، الآثار، العلاج)

المختارة لتقليل اللوغاريتم الإحتمالي للدالة أى "إيجاد الحد الأدنى لقيمة الدالة الآتية مع ملاحظة أن الطريقة المذكورة هى طريقة الإمكان الأعظم".

$$\text{Log}(L) = -\left(\frac{1}{2}\right) \log(1 - m^2) - \left(\frac{N}{2}\right) \log(2\pi\sigma_v^2) \left(\frac{1}{2\sigma_v^2}\right) \sum v_i^2$$

### طريقة كوشران - أوركت The Cochrane - Orcutt Procedure

وتشتمل هذه الطريقة على متسلسلة تكرار ينتج عنها تقدير للمقدار  $m$  يكون أفضل من التقدير السابق، وتعتمد على أن  $m$  هى معامل الارتباط بين الأخطاء المرتبطة عبر الزمن وتستخدم طريقة المربعات الصغرى الأصلية لتقدير النموذج الأصلي كما هو موضح بالمعادلة.

$$Y_t = \alpha + \beta_1 X_{1t} + \beta_2 X_{2t} + \beta_3 X_{3t} + \dots + \beta_k X_{kt} + \mu_t$$

ومن خلال هذه المعادلة نحصل على قيمة البواقي التى نستخدمها لإيجاد الإنحدار.

$$\hat{e}_t = m \hat{\mu}_{t-1} + V_t$$

ومن هنا نحصل على قيمة  $\hat{e}_t$ ،  $m$  التى نستخدمها لإيجاد نموذج

إنحدار جديد فى ظل طريقة الفروق المعممة للتحويل Generalized differencing Transformation، ونموذج الإنحدار الجديد يكون:

$$Y_t^* = \alpha(1 - \hat{m}) + \beta_1 X_{1t}^* + \beta_2 X_{2t}^* + \dots + \beta_k X_{kt}^* + v_t$$

حيث أن:

$$\begin{aligned} Y_t^* &= Y_t - \hat{m} Y_{t-1} \\ X_{2t}^* &= Y_{2t} - \hat{m} X_{2t-1} \\ X_{kt}^* &= X_{kt} - \hat{m} X_{kt-1} \end{aligned}$$

ومن هذه المعادلة الجديدة ينتج لنا قيم المعلمات ... المقدار الثابت  $\hat{\alpha}$  وكذلك جميع معلمات الانحدار الأخرى  $\hat{\beta}_1, \dots, \hat{\beta}_k$  وهذه المعلمات المقدرة تم تحويلها في المعادلة الأصلية والبواقي المقدرة تعرفها من خلال بواقي الانحدار الجديدة.

$$\hat{et} = y_t - \hat{\alpha} - \beta_1 X_{1t} - \bar{X} \beta_2 X_{2t} - \dots - \bar{Y} \beta_k X_{kt}$$

وبإجراء الانحدار بشكل متكرر نحصل على ....

$$\hat{et} = m \hat{\mu}_{t-1} + V_t$$

وبهذه العلاقة يمكن الحصول على تقدير جديد للمقدار  $m$ . ونوقف هذه العملية عندما يختلف التقدير الجديد للمقدار  $m$  عن القديم بحوالي 0.01 أو 0.005 أو بعد إجراء 10, 20 تقدير للمقدار ( $m$ ). وعلى الرغم من ذلك يمكن القول بصفة عامة، أنه ليس هناك ما يضمن أن التقدير النهائي للمقدار سوف يقلل بواقي الانحدار إلى أدنى درجة ممكنة، إذن أن عملية التكرار ذاتها تتضمن تكاليف والتي قد تؤدي أيضاً إلى صعوبة في الوصول للحد الأدنى للبواقي.

### طريقة هيلدرث The Hildreth-Lu Procedure

وفى ظل هذه الطريقة نقوم باختيار مجموعة من القيم للمقدار  $m$ ، فهذه القيم سوف تساعدنا على التخمين Guesses فى القيم التى تأخذها  $m$ ، فلو كان هناك ارتباط متسلسل موجب فإنه يمكن اختيار مجموعة من القيم لـ  $m$  وهى 0,01, 02, 03, 04, 050000, 1.0 وبالتالى فالمعادلة المحولة تكون:

$$Y_i = \alpha(1-m) + \beta_1 X_{i1}^* + \beta_2 X_{i2}^* + \dots + \beta_k X_{ik}^* + v_i$$

فهذه الطريقة تسمح لنا باختيار المعادلة التى تحقق أصغر مجموع لمربعات البواقي وهى أفضل معادلة بالطبع ...

فيمكن أن نختار لـ  $(m)$  قيمة متجاوزة كاختيار أولى حتى نصل إلى الدقة المطلوبة وعندما يتم اختيار قيم  $(m)$  فإن هذا من شأنه أن يؤدي إلى تقريب الحد الأقصى "الإحتمال الأقصى" لقيمة  $(m)$  وهو ما يعنى أن القيمة التى حصلنا عليها لمجموع المربعات عند حدها الأدنى وتكون أكثر شمولاً.

### 3/2/5 اختبارات الارتباط الذاتى Tests for Correlation

سنقدم فى هذا الجزء اختبار درين - واتسون

#### اختبار درين - واتسون Durbin-Watson Test

وهو أحد الاختبارات الشائعة للارتباط الذاتى، حيث يتضمن حساب الاختبارات الإحصائية المبني على البواقي من عملية الانحدار الخاصة بالمربعات الصغرى المعتادة.

فبالأسلوب الذى يتبعه هذا الاختبار يقوم على اختبار الفرض العدمى الذى يعنى عدم وجود ارتباط ذاتى أى أن  $m=0$  فى مواجهة الفرض البديل

الذى يعنى وجود هذا الاختبار أى أن  $m \neq 0$  وهو ما يؤكد وجود اختبار ذو طرفين حيث أن  $m$  قد تكون أكبر وأصغر من الصفر. فالأداة الإحصائية الخاصة بهذه الاختبار هى:

$$Dw = \frac{\sum (e_i - \bar{e})^2}{\sum e_i^2}$$

وهنا يمكن القول أنه عندما تكون قيم  $(e_i)$  قريبة من بعضها البعض، فإن قيمة  $(Dw)$  سوف تكون منخفضة وهو ما يعنى وجود ارتباط ذاتى موجب، كذلك يلاحظ أن القيمة  $(Dw)$  لها مدى ينحصر بين  $(0,4)$  وعندما تكون  $(Dw)$  مساوية للرقم  $(2)$  أو قريبة منه، فهذا يشير إلى عدم وجود ارتباط ذاتى من الدرجة الأولى.

وعندما نتمكن من إجراء هذا الاختبار عدة مرات يتضح لنا أن  $Dw = 2(1 - \hat{m})$ . ومن هنا نستطيع أن نقول أنه فى حالة عدم وجود ارتباط ذاتى فإن  $m=0$  وبالتالي  $Dw=2$  وعندما تكون قيمة  $Dw$  أقل من  $(2)$  فإن هذا يدل على وجود ارتباط ذاتى موجب، بينما عندما تكون هذه القيمة أعلى من  $(2)$  فإن هذا يعنى وجود ارتباط ذاتى سالب.

ويمكن القول أن التفسير الدقيق للقيمة الإحصائية  $(Dw)$  صعب إلى حد كبير لأن تتابع الخطأ لا يعتمد فقط على تتابع قيم  $(e)$  بل يعتمد أيضاً على تتابع قيم  $(X)$ . ولهذا السبب فإن مطعم الجداول تتضمن إحصائيات اختبار تختلف مع عدد المتغيرات المستقلة وعدد المشاهدات.



\_\_\_\_\_ الفصل الخامس \_\_\_\_\_ مشاكل النماذج القياسية (الكشف، الآثار، العلاج)

وقد نستطيع من وضع مدى معين للمدى الذى تتغلب فيه قيمة  $(Dw)$ ، وهذا المدى يحدد بالزمن  $du$ ، حيث أن الحد الأدنى للقيمة  $Dw$  هو الصفر والحد الأقصى هو 4 ومن ثم يمكن استخدام ذلك للتعبير عن اختبارات الفروض بحيث أننا يمكن أن نرفض الفرض العدمى عندما تكون قيمة  $(Dw)$  أقل من  $dl$  وإذا كانت  $Dw$  أكبر من  $du$  فإننا نقبل الفرض العدمى.

وبعبارة أخرى نقول أنه يمكن رفض الفرض العدمى عندما تكون  $Dw < dl - 4$  ونقبل هذا الفرض إذا كانت قيمة  $Dw$  أقل من  $4 - du$  وأكبر من  $du$ . ويمكن القول هنا أن وجود ذلك المدى للاختبار الإحصائى يرجع إلى متابعة البواقى تتقلب عن طريق حركة المتغيرات المستقلة فى معادلة الإنحدار وقد يكون الارتباط الذاتى فى بعض الأحيان راجعاً إلى الارتباط السلسلى للمتغيرات المستقلة خلال هذا المدى، مع العلم أن عناصر الخطأ لا ترجع إلى الارتباط الذاتى، وإذا فرضنا أن  $(X)$  تتبع عمليات الإنحدار. المزدوج فى المعادلة الآتية:

$$X_t = rX_{t-1} + W_t$$

حيث أن:

$W_t$  ،  $0 \leq r < 1$  تشير إلى المتغير العشوائى غير المرتبط

وبعد إجراء بعض الإضافات، فإنه ليس من الصعب إيضاح أن

نعرض  $Dw$  كما يلى:-

$$Dw \approx 2 - 2 \frac{Cov(e_t, e_{t-1}) + r(\beta - \hat{\beta})^2 Var(X_t)}{Var(e_t) + r(\beta - \hat{\beta})^2 Var(X_t)}$$

فغنى المعادلة السابقة نلاحظ أنه كلما انخفضت قيمة  $r$  كلما ازدادت

$(Dw)$  وكذلك عندما تؤول قيمة  $r$  إلى الواحد فإن  $Dw$  تقترب من الصفر حتى لو كانت شروط الخطأ غير مرتبطة ذاتياً.

\_\_\_\_\_ الفصل الخامس \_\_\_\_\_ مشاكل النماذج القياسية (الكشف، الآثار، العلاج)

وبلاحظ من الناحية العلمية أن قيم  $X$  تميل إلى الارتباط عند العمل ببيانات السلاسل الزمنية وبالتالي فإن القيمة النهائية لـ  $dL$  ربما تكون أكبر من 2.

#### مثال تطبيقي معدلات الفائدة Interest rates

نفترض أننا نحاول صياغة نموذج ذو معادلة واحدة لتفسير معدل التغير في الثروة كدالة للإنتاج الصناعي والمعرض من النقود وكذلك معدلات التغير في المستوى العام للأسعار.

ونعبر عن حركة معدل الثروة النقدية بالرمز  $R_t$  والإنتاج الصناعي  $IP_t$  والمعرض النقدي  $M_t$  كذلك التغير في المستوى العام للأسعار  $PUS$  وهو يساوي:

$$PUSM_t = \Delta P_t / P_t + \Delta P_{t-1} / P_{t-1} + \Delta P_{t-2} / P_{t-2}$$

مأخوذ لفترة مقدارها 3 شهور وبالرجوع إلى المعادلة المقدرة نجد الآتي:

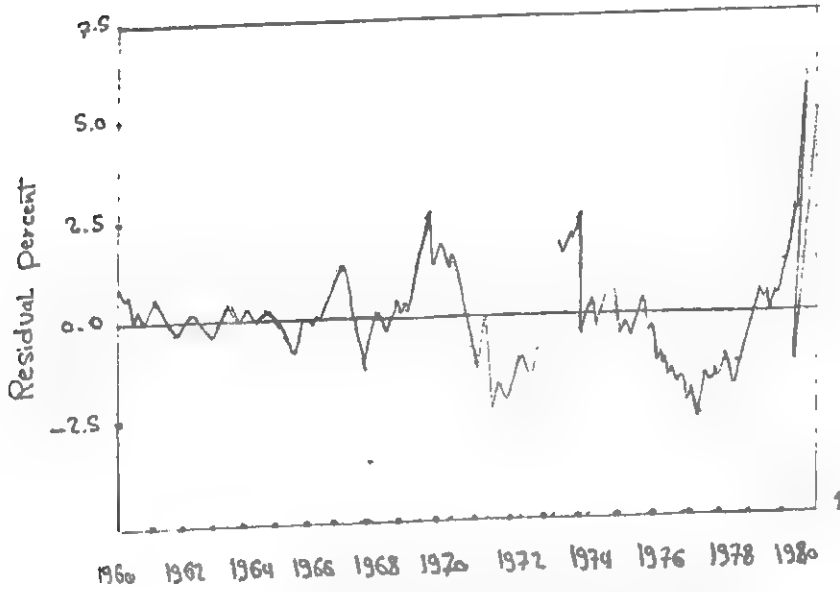
$$\hat{R}_t = -2.475 + 0.0979IP_t - 0.0769M_t + 29.286PUSM_t$$

(-5.303)      (14.16)      (-2.39)      (4.14)

$$R^2 = 0.69 \quad S = 1.3377 \quad DW = 0.18$$

وبما أن قيمة  $DW = 0.18$  إذن هناك ارتباط ذاتي موجب من الدرجة الأولى، هذا الارتباط السلسلي يمكن إيضاحه من خلال الشكل الآتي الذي يوضح أن بواقي الإنحدار إرتباط مرتفع

شكل (4-5)



Residuals from Interest rate equation

Residuals from Interest rate equation

فعندما يكون الباقي موجباً أثناء فترة زمنية معينة فإنه يظل كما هو في الفترة القادمة. وكذلك عندما يكون هذا الباقي سالباً في فترة ما فإنه يظل أيضاً كما هو في الفترة التي تليها، ويمكن القول أنه عندما تنقلب البواقي لتصبح سالبة في فترة وموجبة في الفترة التي تليها فإن ذلك يؤدي إلى وجود بعض الإرتباك في عملية التنبؤ ويلاحظ ذلك من خلال الفترة 76 وحتى 80.

وعموماً إذا لم توجد السبل الكفيلة بعلاج هذه الحالة، فالمعلومات المقدرة تكون غير كفاء، وحتى نقوم بتحسين النتائج، فإنه من الممكن إعادة تقدير معادلة الفائدة باستخدام طريقة Cochrane-ortcut والناتج كانت كالآتي:

$$\hat{R}_1 = -15.729 + 0.557IP_t - 0.0235M_t + 5.579PSuM_t$$

وفى الواقع نلاحظ أن قيمة (t) الإحصائية منخفضة بعض الشيء، لكن هذه القيمة هي قيمتها الحقيقية فعلاً، وأخيراً يمكن القول أن قيمة (Dw) للمقدار 1.45 تكون أقل من 2 وهذا فى حد ذاته يقترح وضع صيغ أخرى أكثر تعقيداً للتعبير عن الارتباط بين البواقي.

#### إختبار الارتباط الذاتى عندما يوجد إبطاء بالمتغير التابع

Testing for Auto Correlation when there is alagged dependent variable \*

فعندما يوجد لدينا واحداً أو أكثر من المتغيرات الداخلية المبطأة Lagged endogenous variable فإن قيمة Dw تقترب من 2 عندما تكون الأخطاء مرتبطة ذاتياً.

وهذا يعنى أن (Dw) تمدنا بمؤشر للارتباط الخطى عندما تكون قيمتها منخفضة، وهناك إختبار بديل آخر أكثر سهولة قام دربن Durbin بتقديمه لنا وهو يصلح للعينات الكبيرة والصغيرة على حد سواء ولبيان كيفية إجرائه عملياً، نفترض تقدير المعادلة الآتية باستخدام طريقة المربعات الصغرى المعتادة.

$$Y_t = \alpha + \beta Y_{t-1} + \gamma X_t + \mu_t$$

والإختبارات الإحصائية المستخدم هو إحصائية دربن المسماة بـ h

وتعرف كالآتى:-

$$h = \hat{m} \sqrt{\frac{T}{1 - T[Var(\hat{\beta})]}}$$

وبلاحظ أن  $Var(\hat{\beta})$  يقدر على أنها مربع الإخطاء المعيارية لمعامل المتغير المبطن الداخلي، أما  $(T)$  فهي عدد المشاهدات و  $(\hat{m})$  هي معامل الارتباط السلسلي المقدر من الدرجة الأولى وبلاحظ أن قيمة  $(\hat{m})$  يمكن الحصول عليها مباشرة من القيمة التالية حيث أن:

$$Dw \approx 2(1 - \hat{m})$$

وبالتعويض عن ذلك في المعادلة السابقة نحصل على ...

$$h = (1 - \frac{Dw}{2}) \sqrt{\frac{T}{1 - T[Var(\beta)]}}$$

وطالما أن درين قد بين أن قيمة  $(h)$  الإحصائية تتوزع توزيعاً طبيعياً مع وحدة التباين، فإن الاختبار الأولي للارتباط الذاتي يمكن عمله مباشرة باستخدام جدول التوزيع الطبيعي.

ومن الضروري ملاحظة أن اختبار  $h$  يكون غير ملائم عندما تكون القيمة  $1 < T \text{var}(\hat{\beta})$ . ولا يمكن أخذ الجذر التربيعي للمقدار السالب، وفي هذه الحالة يقترح درين اختبار آخر ربما يكون أكثر تعقيداً وفيه نحصل على بواقي المتغير  $\hat{e}_t$  من انحدار المربعات الصغرى المعتادة ثم نقوم بتكوين البواقي المبطة للمتغير  $\hat{e}_{t-1}$  مع إهمال المشاهدة الأولى للتبسيط بالتالي فإن المعادلة المقدرة:

$$\hat{e}_t = \alpha + \beta + m \cdot \hat{e}_{t-1} + \beta \cdot \hat{e}_{t-1} + Y \cdot X_t + \mu_t$$

والآن يمكن إجراء اختبار (t) للفرض العدمي الذي يعنى أن قيمة ( $m^*$ ) تكون غير معنوية ولا تختلف عن الصفر، فإذا رفضنا الفرض العدمي فإننا نستنتج وجود ارتباط ذاتي من الدرجة الأولى... وعندما يكون هناك ارتباط ذاتي معنوي في ظل وجود المتغير التابع المبطئي فإن تقدير المعلمة يصلح غاية في الصعوبة طالما أن تقدير المربعات الصغرى في هذه الحالة سوف يعطينا نتائج متحيزة.

### مثال تطبيقي الإستهلاك الكلي Aggregate Consumption

قمنا بتقدير نموذج لدالة الإستهلاك الكلي الديناميكية و رمزنا على الإستهلاك بالرمز (C) "الإستهلاك الجارى" وهو دالة في الإستهلاك المبطئي الربع سنوى C-1 والدخل الممكن التصرف فيه  $Y_0$ ، ولقد كانت المعادلة المقدرة بطريقة المربعات الصغرى بإستخدام بيانات ربع سنوية في الفترة من 1959 حتى الربع الأول من 1988 وهى كما يلى:

$$C_t = 1.747 + 0.0988yDt + 0.08974C_{t-1}, Dw=1,5594$$

$$(0.364) \quad (0.0399) \quad (0.04335)$$

$$R^2=0.999$$

ولإختبار الإرتباط الذاتى نستخدم إحصائية دربن (h)، وطالما أن التباين الخاص بمعامل المتغير المبطئي التابع يكون 0.04335 وقيمة  $Dw=1.55941$  وكذلك قيمة  $T=117$ .

ومن ثم يمكن حساب قيمة (h):

$$h = \left[ 1 - \frac{1.5594}{2} \right] \left[ \frac{117}{1 - (117)(0.04335)} \right]^{0.5} = 2.7$$

وحيث أن  $2.7 <$  القيمة الجدولية للتوزيع الطبيعي عند مستوى معنوية 5% فإننا نرفض الفرض العدمي الذي يقرر عدم ارتباط ذاتي، ونتيجة لذلك يكون من الواجب محاولة تصحيح النموذج وذلك بعلاج مشكلة الارتباط الذاتي بصورة ملائمة.

### 3/5- الارتباط بين المتغير المستقل والخطأ العشوائي

Correlation between and independent variable and the Error Term:

في الحقيقة يمكن ملاحظة الصعوبات الناتجة من وجود ارتباط بين المتغير المستقل والخطأ العشوائي عند تناول نموذج مكون من متغيرين وتقاس هذه المتغيرات على شكل انحرافات حيث أن:-

$$xi = (Xi - \bar{X})$$

$$yi = (yi - \bar{Y})$$

بالتالى فإن:

$$\hat{\beta} = \frac{\sum xiyi}{\sum xi^2}$$

حيث أن

$$yi = \beta xi + \mu i)$$

وبالتعويض عن قيمة  $y_i$

$$\hat{\beta} = \frac{\sum x_i(\beta x_i + \mu_i)}{\sum x_i^2}$$

$$\hat{\beta} = \frac{\beta \sum x_i^2 + \sum x_i \mu_i}{\sum x_i^2} = \beta + \frac{\sum x_i \mu_i}{\sum x_i^2} \quad (6-1)$$

ويلاحظ أن  $\hat{\beta}$  تكون تقدير غير متحيز للمعلمة  $\beta$  إذا كانت مفردات المتغير  $X$  ثابتة في العينات المختلفة، وهذا الفرض يعتمد بشدة على أن العلاقة بين  $x_i$ ،  $e_i$  معندمة تماماً. بمعنى أن التباين بينهما يساوى الصفر، ولكن في هذه الحالة كون المتغير  $x$  غير ثابت أى عشوائى فإن القول بأن  $\beta$  هى تقدير غير متحيز هو قول غير صحيح.

ويلاحظ أنه يقال على التقديرات أنها متسقة إذا كانت قيمة  $\hat{\beta}$  المقدرة تؤول إلى قيمة  $\beta$  عندما يكبر حجم العينة أى أن  $\hat{\beta} = \beta$

كذلك فإن:

$$E(\hat{\beta}) = \beta + E\left(\frac{\sum x_i \mu_i}{\sum x_i^2}\right)$$

فإذا كان:

$$\text{Cov}(x_i, e_i) \neq 0$$

فإن:

$$E(\hat{\beta}) = \beta$$



\_\_\_\_\_ الفصل الخامس \_\_\_\_\_ مشاكل النماذج القياسية (الكشف، الآثار، العلاج)

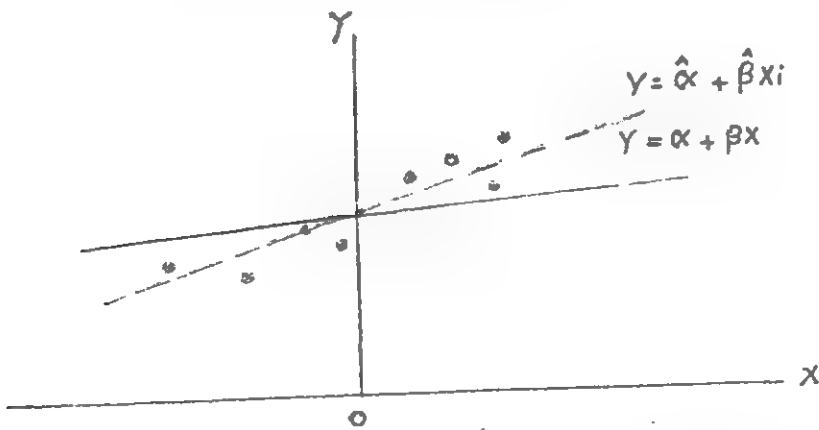
وفى حالتنا هذه إذا أردنا إثبات أن  $E(\hat{\beta}) = \beta$  فإنه يجب التحقق من أن  $\sum x_i \mu_i = 0$  وذلك عندما يكبر حجم العينة.

وفى الواقع عندما تكون  $\mu_i$  مرتبط  $x_i$  فإنه ليس هناك ما يضمن أن قيمة  $\beta$  سوف تساوى  $\hat{\beta}$  فالمقدار  $\frac{\sum x_i \mu_i}{\sum x_i^2}$  قد يكون موجباً، بالتالى فإن قيمة  $\hat{\beta}$  سوف تزيد عن قيمة  $\beta$  بغض النظر عن حجم العينة.

وهذا يعنى أن الارتباط بين المتغير المستقل والخطأ العشوائى يقود إلى غياب خاصية الاتساق عند تقدير المعلمات بطريقة المربعات الصغرى المعتادة.

ويمكن توضيح ذلك من خلال الشكل التالى حيث يعبر الخط المتصل عن خط الانحدار الحقيقى بنما يمثل الخط المتقطع المقدر أى خط إنحدار المربعات الصغرى العادية.

شكل رقم (5-5)  
الارتباط بين المتغير المستقل والخطأ العشوائى  
Correlation between X and  $\mu_i$



ونلاحظ من الشكل أن المربعات الصغرى المعتادة قد فشلت في توفير معلمات غير متحيزة ومتسقة وذلك لأن معامل الانحدار يكون مقدراً بأكبر من قيمته الحقيقية.  
حيث:

$$\hat{\beta} = \beta + \frac{\sum x_i \mu_i}{\sum x_i^2}$$

### 1/3/5. الأخطاء في المتغيرات Errors in variables

من الملاحظ أننا افترضنا في التحليل السابق أن كل المتغيرات المستخدمة في أسلوب حساب الانحدار قد قيست دون وجود أخطاء بها، لكن إذا نظرنا بشكل أكثر واقعية سنجد أن أخطاء القياس تحدث غالباً، والتي قد تؤدي إلى تغير خصائص معلمات الانحدار المقدرة.

#### أولاً: حالة وجود أخطاء بالمتغير التابع (Y)

تشير الأخطاء في المتغيرات إلى الحالة التي تحتوي فيها متغيرات الانحدار على أخطاء في القياس، فأخطاء القياس في المتغير التابع تدخل في حد التشويش ولا تخلق أي مشكلة. لكن الأخطاء في المتغيرات المفسرة تؤدي إلى تقديرات للمعالم متحيزة وغير متسقة.

بفرض أن نموذج الانحدار الحقيقي هو

$$Y_i = \beta x_i + \mu_i$$

حيث  $\mu_i$  هو الخطأ العشوائي الذي يمثل تأثير المتغيرات المهملة علاوة على أن المتغير  $y_i$  ينتج من عملية القياس  $y_i^* = y_i + v_i$  عندما يكون  $Cov(\mu_i, X_i) = 0$ .

ومن هنا فإن  $y^*$  هو المتغير التابع الذى سوف يجرى من خلاله تقدير معالم النموذج. ويمكن كتابة المعادلة السابقة فى الشكل التالى:

$$Y^* = \beta x_i + (\mu_i + v_i)$$

بعد إضافة خطأ القياس  $V_i$  إلى الطرفين ويلاحظ أنه لو كانت قيمة  $V_i$  لها قيمة متوسطة لا تساوى الصفر، فإن الإنحدار المقدر يتطلب وجود مقدار ثابت يعبر عن القيمة المتوسطة للخطأ  $v_i$  كما فى المعادلة السابقة. وبشكل عام يلاحظ أن وجود خطأ القياس فى المتغير التابع يؤدى إلى زيادة تباين الخطأ وهذه الزيادة يمكن حسابها وبالتالي يمكن تقدير تباين الباقي وكل المختبرات الإحصائية أيضا.

**ثانياً: حالة وجود أخطاء بالمتغير المستقل ( $X$ ).**  
افترض أن:

$$x_i^* = x_i + v_i$$

حيث أن  $x_i^*$  هى القيمة المشاهدة،  $X_i$  هى قيمة  $x$  الحقيقية ويكون نموذج الإنحدار الحقيقى هو  $y_i = \beta x_i + \mu_i$  بينما نموذج الإنحدار الفعلى هو

$$y_i = \beta(x_i^* - v_i) + \mu_i$$

$$y_i = \beta x_i^* - \beta v_i + \mu_i$$

$$y_i = \beta x_i^* + (\mu_i - \beta v_i)$$

$$y_i = \beta x_i^* - \mu_i^*$$

ويمكن أن نلاحظ أن:

$$\text{Cov}(\mu_i^*, x_i^*) = E[(\mu_i - \beta v_i)(x_i + v_i)]$$

$$= E(\mu_i x_i + \mu_i v_i - \beta x_i v_i - \beta v_i^2)$$

$$= 0 + 0 - 0 - \beta \sigma_\mu^2$$

$$= -\beta \sigma_\mu^2$$

ومن هنا فإن معاملات الانحدار سوف تكون متحيزة وغير متنسقة كما أن درجة التحيز وعدم الاتساق تكون مرتبطة بالتباين في خطأ القياس ( $v_i$ ) فكلما إرتفع هذا التباين ازدادت درجة التحيز وعدم الاتساق.

**ثانياً: حالة وجود أخطاء قياس في كلا من ( $y, x$ )**

ففي الحالتين السابقتين كانت الفروض كالتالى:

$$Y_i^* = y_i + V_{yi} \quad V_{yi} \sim N(0, \sigma_{vy}^2)$$

$$Y_i^* = y_i + V_{yi} \quad V_{yi} \sim N(0, \sigma_{vy}^2)$$

وبفرض أن:

$$y_i = \beta x_i$$

ومن كلا من  $V_{xi}, V_{yi}$  غير مرتبطين مع بعضهما البعض وغير مرتبطين أيضاً بـ  $X_i$  كذلك كل خطأ غير مرتبط ذاتياً ومن ثم نكتب معادلة الانحدار المقدر كالتالى:

ونظراً لأن:

$$Y_i^* = \beta^* x_i + (V_{yi} - V_{xi})$$

$$y_i^* = \beta x_i$$

$$y_i^* = \beta x_i + V_{yi}$$

$$x_i = x_i^* - V_{xi}$$

$$y_i^* = \beta(x_i^* - V_{xi}) + V_{yi}$$

$$y_i^* = \beta x_i - \beta v_{xi} + V_{yi}$$

إذن:

$$y_i^* = \beta x_i + (V_{yi} - \beta x_i)$$

وبتقدير  $\hat{\beta}$  بطريقة المربعات الصغرى العادية

$$\hat{\beta} = \frac{\sum x_i^* y_i^*}{\sum x_i^2} = \frac{\sum (x_i + v_{xi})(y_i + V_{yi})}{\sum (X_i + V_{xi})^2}$$

ونظراً لأن كل من  $V_{xi}$ ،  $V_{yi}$  متغيرات عشوائية، فليس من السهل تقدير تحيز  $\beta$  وذلك لأن القيمة المتوقعة للنسبة بين متغيرين عشوائيين لا تساوى نسبة القيم المتوقعة للمتغيرين، ومع ذلك فإنه يمكن أن نقدر عدم اتساق  $\beta$  تقدير عن طريق تقدير  $\hat{\beta}$  عندما يؤول حجم العينة إلى عدد كبير، وسوف نرمز لهذا بالرمز  $plim$  ولأن  $V_{xi}$ ،  $V_{yi}$  قيم غير مرتبطة مع بعضها البعض كلا منهما غير مرتبط مع  $X_i$  فأحد طرق التقدير تكون...

$$p \lim = p \lim + \frac{\sum x_i^2}{\sum x_i^2 + \sum Vx_i^2}$$

$$= p \lim + \frac{\beta Var(Xi)}{Var(Xi) + Var(VXi)}$$

وبالقسمة على  $Var(x_i)$

إن:

$$p \lim \hat{\beta} = \frac{\beta}{1 + \sigma_v^2 / Var(Xi)}$$

ونلاحظ مما سبق أنه كلما زاد تباين  $x$  وتباين  $Vxi$  زاد عدم اتساق  $\beta$ ، ويلاحظ مع وجود خطأ التقدير في المعادلة فإنه يؤدي إلى عدم تقدير المعلومات الحقيقية للإنحدار عند استخدام طريقة المربعات الصغرى المعتادة.

### 2/3/5 - تقديرات المساعدة ((الوسيلة))

#### Instrumental – Variables Estimation

وهي المتغيرات التي تحل محل المتغيرات المستقلة التي ترتبط بالخطأ العشوائي، وكذلك فهي مناسبة للتعامل مع الأخطاء في المتغيرات، فالأسلوب المسمى بالمتغيرات المساعدة هو أحد الأساليب التي يمكن استخدامها لحل مشكلة خطأ القياس، الأمر الذي يتضمن البحث عن متغير جديد هو  $Z$  يكون مرتبطاً ارتباطاً كبيراً بالمتغير المستقل  $x$  وفي نفس الوقت غير مرتبط بحد الخطأ في المعادلة وكذلك غير مرتبط بأخطاء القياس للمتغيرين  $x, y$  ومن ثم فالمتغير الوسيط يجب أن يتوافر فيه شرطين أساسيين:-

\_\_\_\_\_ الفصل الخامس \_\_\_\_\_ مشاكل النماذج القياسية (الكشف، الآثار، العلاج)

(1) أن الارتباط بين  $Z$  وكلا من  $V_{xi}$ ,  $V_{yi}$ ,  $\mu_i$  يقترب من الصفر عندما يؤول حجم العينة إلى الكبر.

(2) الارتباط بين  $x$ ,  $z$  ليس صفرياً عندما يؤول حجم العينة إلى الكبر وحيث أن المتغير الوسيط مرتبط بشدة مع المتغير  $x$  وبفرض وجود الحالة الثانية سابقة الذكر إذا كان ...

$$x^* = x + V_{xi}$$

$$y_i = \beta x_i + \mu_i$$

فإن:

$$\hat{\beta} = \frac{\sum Y_i Z_i}{\sum x_i^* Z_i}$$

$$\hat{\beta} = \frac{\sum z_i (\beta x_i^* + \mu_i)}{\sum x_i^* Z_i} = \frac{\beta \sum z_i x_i^* + \sum z_i \mu_i}{\sum x_i^* Z_i}$$

$$\hat{\beta} = \beta + \frac{\sum z_i \mu_i}{\sum x_i^* Z_i}$$

ونلاحظ هنا أنه عند اختيار  $Z$  غير وسيط فإن  $\beta^*$  سوف تقترب من

$\beta$  عندما يؤول حجم العينة للكبر وذلك لأن  $(\sum Z_i \mu_i)$  تقترب من الصفر،

حيث أن  $Z$ ,  $\mu$  غير مرتبطين ومن ثم سيكون لدينا تقدير متسق لـ  $\beta$ .

### تعيين الخطأ "تحديد" Specification Error

إن تحديد النموذج بشكل صحيح يترتب عليه عدة أمور غاية في

الأهمية، إذ أنه يحدد مدى دقة المعلومات المقدرة، وكذلك نموذج التقدير

ونموذج الاختيار، وفي الحقيقة لا يمكن من الناحية الواقعية وجود نموذج

صحيح تماماً من كل الأخطاء إلا أن الباحثين يحاولون اختيار أفضل النماذج

\_\_\_\_\_ الفصل الخامس \_\_\_\_\_ مشاكل النماذج القياسية (الكشف، الآثار، العلاج)

الممكنة عن طريق محاولة تجريب أكثر من نموذج محتمل للتعبير عن الظاهرة موضع الدراسة. إلا أن القيام بذلك يحتاج إلى جهد كبير علاوة على ذلك فهو يحتاج أيضا إلى قدر كبير من الأموال فهي في الواقع عملية مكلفة. ويلاحظ أن المشكلة الرئيسية المرتبطة بالنموذج هي هل تم تعيين هذا النموذج بصورة صحيحة أما لا أى مشكلة Specification or misspecification وهنا نكون بصدد نوعين من عدم التحديد أو التعيين وثيقة الصلة بالنموذج.

أولا: يحدث عند نسيان بعض المتغيرات.

ثانيا: يحدث عندما يضاف متغيرات غير وثيقة الصلة بالنموذج.

وسوف يتم مناقشة هذه النقاط في الفقرتين الآتيتين وسوف نتوقف في مناقشتنا للتعرف على مشاكل النموذج بمشكلة عدم اختيار العلاقة الدالية الملائمة للتعبير عنه.

#### المتغيرات المحذوفة أو المهملة Omitted Variables

بفرض أن النموذج الحقيقي معطى بالمعادلة

$$Y_i = \beta_2 x_{2i} + \beta_3 x_{3i} + \mu_i$$

بينما نموذج الإنحدار المقدر

$$Y_i = \beta_{2i}^* + \mu_i^*$$

حيث أن

$$\hat{\beta}_2^* = \frac{\sum x_{2i} y_i}{\sum x_{2i}^2}$$

وبإحلال قيمة  $y_i$  في المعادلة الأولى فإن

$$\hat{\beta}_2^* = \frac{\sum x_{2i} (\beta_2 x_{2i} + \beta_3 x_{3i} + \mu_i)}{\sum x_{2i}^2}$$



$$\hat{\beta}_2^* = \frac{\sum (\beta_2 x_{2i}^2 + \beta_3 x_{2i} + x_{2i} \mu_i)}{\sum x_{2i}^2}$$

$$\hat{\beta}_2^* = \beta_2 + \frac{\beta_3 \sum x_{2i} x_{3i}}{\sum x_{2i}^2} + \frac{\beta_3 \sum x_{2i} \mu_i}{\sum x_{2i}^2}$$

ولأن  $x_2$  ثابت،  $E(\mu)=0$  لذلك فإن الحد الأخير توقعه = 0

$$E(\hat{\beta}_2^*) = \beta_2 + \beta_3 \frac{\sum x_{2i} x_{3i}}{\sum x_{2i}^2} = \beta_2 + \beta_3 E\left(\frac{\sum x_{2i} x_{3i}}{\sum x_{2i}^2}\right)$$

$$E(\hat{\beta}_2^*) = \beta_2 + \beta_3 \frac{Cov(X_2, X_3)}{Var x_2}$$

إذا تقدير إنحدار المربعات الصغرى المعادلة السابقة تقدير لمعلمة الإنحدار ( $\beta_2$ ) وسوف تختفي حالة التحيز هذه عندما يكون تباين  $x_2, x_3 = 0$  صفر أى أن  $[Cov(x_2, x_3)=0]$  وذلك عندما تكون قيمة  $x_3, x_2$  غير مرتبطتين فى العينة. وعندما يكون المتغير المحذوف غير مرتبط مع جميع المتغيرات المستقلة التى يشملها النموذج، فإن التحيز سوف يختفى. أما إذا كان المتغيران  $x_3, x_2$  بينهما ارتباط فإن معامل  $x_2$  سوف يشتمل على أثر المتغير  $x_3$ ، وبالتالي يكون متحيز، أما إذا كان المتغيران  $x_3, x_2$  غير مرتبطان، فإن حذف  $x_3$  سوف يجعل معامل  $x_2$  لا يتأثر بـ  $x_3$  وبالتالي لا يكون متحيزاً. وبالنسبة لتأثير حذف متغير على تباين  $\beta$  وتقديره، فإنه يمكن القول أن:

- فى حالة عدم ارتباط  $x_2, x_3$  فإن معامل  $\hat{\beta}_2^*$  سوف يكون تباينها مماثل لتباين  $\hat{\beta}_2$ .
- وعندما يكونا  $x_2, x_3$  مرتبطين، فإن التباينات بين  $\hat{\beta}_2^*, \hat{\beta}_2$  تكون غير متماثلة وبالتالي فإن التباين الفعلى لـ  $\hat{\beta}_2^*$  يكون أقل من التباين الفعلى لـ  $\hat{\beta}_2$ .

#### وجود متغير غير مناسب

بفرض أن النموذج الحقيقى معطى كالاتى:

$$Y_i = \beta_2 x_{2i} + \mu_i$$

فى حين أن نموذج الإنحدار يعطى عن طريق المعادلة الآتية ...

$$Y_i = \beta_2 x_{2i} + \beta_3 x_{3i} + \mu_i$$

ويمكن القول أن الآثار الناتجة عن إضافة متغير غير مناسب تختلف تماماً عن الآثار الناتجة عن المتغير المحذوف، بإضافة متغير غير مناسب  $x_3$

مثلاً، فهذا دليل على أننا لا نأخذ فى الاعتبار أن  $\hat{\beta}_3^* = 0$ .

وعند حساب تقدير معامل  $x_2$  أى  $\hat{\beta}_2$  فى المعادلة السابقة نحصل على:-

$$\hat{\beta}_2^* = \frac{\sum (x_{3i})^2 (\sum x_{2i} y_i) - (\sum x_{2i} x_{3i})(\sum x_{3i} y_i)}{(\sum x_{2i}^2)(\sum x_{3i}^2) - (\sum x_{2i} x_{3i})^2}$$

\_\_\_\_\_ الفصل الخامس \_\_\_\_\_ مشاكل النماذج القياسية (الكشف، الآثار، العلاج)

وبإحلال  $y_i$  من المعادلة الأولى والتعويض بها في المعادلة الأخيرة نحصل على

$$\hat{\beta}_2^* = \frac{\sum x_{3i}^2 \sum x_{2i} (\beta_2 x_{2i} + \mu_i) - \sum x_{2i} x_{3i} (\sum x_{3i}) (\beta_2 x_{2i} + \mu_i)}{(\sum x_{2i}^2)(\sum x_{3i}^2) - (\sum x_{2i} x_{3i})^2}$$

$$\hat{\beta}_2^* = \frac{\beta_2 \sum x_{2i}^2 x_{3i}^2 + \sum x_{3i}^2 (\sum x_{2i} \mu_i) - \beta_2 (\sum x_{2i} x_{3i})^2 + (\sum x_{3i} x_{2i}) (\sum x_{3i} \mu_i)}{(\sum x_{2i}^2)(\sum x_{3i}^2) - (\sum x_{2i} x_{3i})^2}$$

$$\hat{\beta}_2^* = \beta_2 + \frac{(\sum x_{3i}^2)(\sum x_{2i} \mu_i) - (\sum x_{2i} x_{3i})(\sum x_{3i} \mu_i)}{(\sum x_{2i}^2)(\sum x_{3i}^2) - (\sum x_{2i} x_{3i})^2}$$

وحيث أن توقع كل من  $X_2, X_3$  يساوى مقدار ثابت إذن:

$$E(\hat{\beta}_2^*) = \beta_2$$

أى أن إدخال متغير غير مناسب لا يؤثر على تقديرات معلمة الانحدار لكن تباين معامل الانحدار المقدر  $\hat{\beta}_2 < \hat{\beta}_2^*$  تباين المعامل.

#### Nonlinearties

#### 4/5 - عدم الخطية

هناك خطأ آخر ممكن حدوثه، عندما يختار الباحث نموذج الانحدار الخطى للتعبير عن الظاهرة موضع الدراسة على الرغم من صعوبة تناولها فى شكل نموذج خطى، فاستخدام نموذج بسيط مثل النموذج

$$Y_i = \beta_2 X_{2i} + \beta_3 X_{2i}^2 + \beta_4 X_{2i}^3 + \mu_i$$

حيث يكون أكثر دلالة فى التعبير عن الظاهرة وعلى الرغم من أنه غير خطى إلا أنه يمكن تحويله إلى الصورة الخطية وذلك كما فى النموذج الآتى:

$$Y_i = \beta_2 x_{2i} + \mu_i$$

إذ أن توصيف النموذج في شكل علاقة خطية عندما يكون الشكل الخطي غير مناسب للظاهرة سوف يؤدي إلى تحيز وعدم اتساق التقدير.

#### 1/4/5 - الكفاءة مقابل التحيز في بناء النموذج:

وهنا نقول أن إضافة أحد المتغيرات إلى النموذج أو القيام بحذف أحد المتغيرات أمراً يجب أن يكون محسوباً بدقة، بحيث أننا لا نضيف إلى النموذج إلا المتغيرات التي لها أهمية في تفسير الظاهرة، فلا يجب أن توجد متغيرات لا فائدة من وضعها في النموذج، كذلك فإن إهمال أحد المتغيرات يجب أن يتم بعد التأكد من عدم أهمية هذا المتغير في التفسير ويلاحظ أن القيام بهذه العملية يكون لها تكلفة يتحملها النموذج وتتمثل في التحيز وعدم الاتساق "إذا لم يتم مراعاة هذه النقطة بشكل كاف"

وبشكل عام يراعى اختيار النموذج دائماً بالشروط المعروفة وهي شروط الكفاءة علاوة على أن الهدف من بناء النموذج أو الهدف من البحث هو موضوع يمثل أهمية في عملية اختيار النموذج.

فلو كانت التوقعات الجارية هي الهدف .. فإن تخفيض متوسط مربع الخطأ يكون أمراً منطقياً... ومن هنا فإن القيام بتقدير نماذج بديلة خلال فترة زمنية معينة ومقارنة متوسط مجموع مربعات الأخطاء لهذه النماذج سوف يحكم عملية الاختيار.

ويلاحظ أن استخدام المختبرات الإحصائية مثل (t) ، (F) لا يتم إلا بعد القيام بتحديد النموذج وتوصيفه. فيمكن استخدام المختبر (t) بغرض تحديد مدى وثاقة الصلة بين متغيرين في نفس الوقت الذي يمكن فيه استخدام

\_\_\_\_\_ الفصل الخامس \_\_\_\_\_ مشاكل النماذج القياسية (الكشف، الآثار، العلاج)

المختبر (F) لبحث ذلك بالنسبة للعديد من المتغيرات. أما في حالة عدم التحديد الجيد للنموذج وإهمال الكثير من المتغيرات فإن هذه المختبرات الإحصائية، لن تعطينا نتائج مقبولة من هذا النموذج المقدر ...

#### مثال تطبيقي لتقدير الطلب على النقود

في دراسة خاصة لتقدير دالة الطلب على النقود في الآجلين القصير والطويل وأسفرت عملية التقدير عن معادلة الطلب المقدرة الآتية:

$$\hat{M}_T = 0.1365 + 1.069Y_{pt} - 0.01321yt - 0.747R_t$$

$$R^2 = 0.9965 \quad (0.148) \quad (0.13897) \quad (0.0540)$$

ويلاحظ أن البيانات ربع سنوية وتشير الرموز إلى:-

$M_t$  هي اللوغاريتم الطبيعي للأصول المالية الكلية.

$Y_{pt}$  هي اللوغاريتم الطبيعي لمعلمة الدخل الدائم.

$Y_t$  هي اللوغاريتم الطبيعي للدخل الجارى

$R_t$  هي اللوغاريتم الطبيعي لمعدل الفائدة.

وحيث أن معادلة الطلب على النقود هنا في الأجل الطويل، من ثم يمكن استنتاج أن معلمة الدخل الدائم تكون أكثر أهمية من معلمة الدخل الجارى ... والواقع أن المعادلة المقدرة قد يوجد بها نقص ناتج عن إهمال بعض المتغيرات، بالتالى يكون التحديد الأفضل لها ممثلاً في المعادلة التالية:-

$$M_t = \beta_1 + \beta_2 y_{pt} + \beta_3 Y_t + \beta_4 R_t + \beta_5 M_{t-1} + \mu_i$$

\_\_\_\_\_ الفصل الخامس \_\_\_\_\_ مشاكل النماذج القياسية (الكشف، الآثار، العلاج)

فلو كانت هذه المعادلة صحيحة فعلاً ومطابقة للواقع إلى حد كبير، فإنه يمكن لنا معرفة التحيز الذى حدث بالنسبة للمعادلة الأولى بإستخدام النتائج السابقة عن تأثير المتغيرات المهملة وهى التى تحدد الخطأ، ومع افتراض تقدير معلمة الدخل الدائم، فإنه يمكن إعادة تصحيح النموذج الأصلي حيث يصبح:

$$M_t = \alpha_1 + \alpha_2 Y_{pt} + \alpha M_{t-1} + \mu_t$$

إن فاستخدام المعادلة

$$E(\hat{\beta}_2^*) = \beta_2 + \beta_3 \frac{Cov(X_2, X_3)}{Varx_2}$$

سوف يقودنا إلى استنتاج أن التحيز فى المعلمة المقدرة  $\alpha_2$  فى المعادلة

$$M_t = \alpha_1 + \alpha_2 Y_{pt}$$

سوف يكون:

$$E(\hat{\alpha}_2) - \alpha_2 = \alpha_3 \frac{Cov(Y_{pt}, M_{t-1})}{Var(Y_{pt})}$$

وسوف نتوسع فى مناقشة هذه النقطة بعد ذلك عندما نستخدم عدد من المعادلات، وعدد من المتغيرات التفسيرية للتعبير عن الظاهرة فى الطبيعة القادمة بإنشاء الله .

وفى هذه الحالة فإن التحيز فى معلمة الدخل الجارى تقدر بواسطة

$$E(\hat{\beta}_2) - \beta = \beta_s d_2$$

حيث أن  $d_2$  هى معامل  $yp_t$  فى الإنحدار الخاص بـ  $M_{t-1}$  على  $Y_t, Y_{pt}$ ،  $R_t$  وهو كالاتى:

$$M_{t-1} = d_1 + d_2 Yp_t + d_3 Y_t + d_4 R_t + V_t$$

وهنا يلاحظ أنه طالما كانت  $M_{t-1}$  تشتمل على فترة زمنية واحدة للمتغير الحالى وحيث أن  $Yp_t, M_{t-1}$  معلوم مدى إرتباطهما الكبير، لذا فإننا نتوقع أن إشارة  $M_{t-1}$  سوف تكون موجبة أى أنه عندما يكون الإرتباط محدد فإنه يمكن التنبؤ بأن التحيز سوف يكون موجب القيمة.

ولعل ذلك يرجع إلى إعطاء أهمية كبيرة مبالغ فيها للدخل الدائم، وإهمال بعض المتغيرات مما يؤدي إلى وجود خطأ فى تعيين النموذج، والنتيجة سوف تكون

$$\hat{M}_t = 0.3067 + 0.06158Yp_t + 0.03274Y_t - 0.3325R_t + 0.5878M_{t-1}$$

(0.14284)      (0.0940)      (0.0597)      (0.0669)

ومن الواضح أن معامل  $M_{t-1}$  موجباً و ذو دلالة معنوية فى حين أن معامل  $Yp_t$  على الرغم من كونه موجب إلا أنه غير معنوى عند مستوى معنوية 5%.

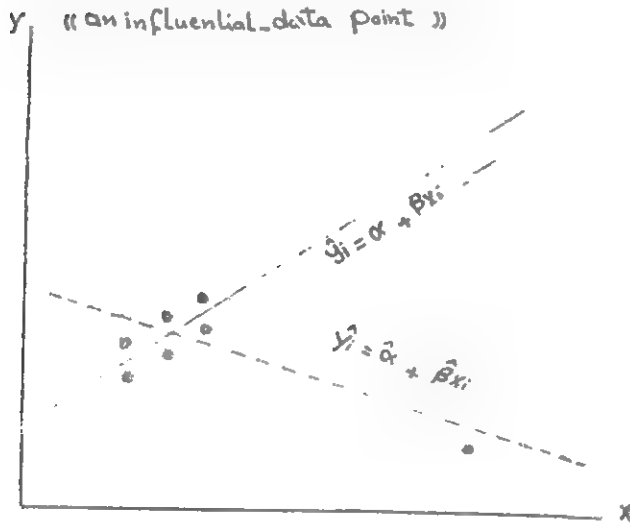
ولذا فإن الإستنتاج الأولى الذى يجب ملاحظته هنا هو:

- إن تحديد الدخل الجارى يعد أكثر أهمية من الدخل الثابت "الدائم"، فى تفسير الطلب على النقود.

## 2/4/5. تشخيص الانحدار Regression diagnostics

إن نموذج الانحدار الخطى قد يكون عرضة للعديد من الأخطاء الممكنة، علاوة على أن وجود هذه المشاكل مثل مشكلة عدم ثبات التباين يؤدي إلى عدم كفاءة أدوات التقدير المستخدمة. وفي الواقع إن معرفة واكتشاف تأثير المشاهدات المتطرفة في البيانات علاوة على تأثير المتغيرات المهمة على النموذج، قد تكون مسألة صعبة ويمكن محاولة استبيان ذلك منه خلال الشكل (2-6)، وفيه نلاحظ نموذج الانحدار الحقيقي ذو الميل الموجب والمعطى بالمعادلة  $y_i = \alpha + \beta x_i + \mu_i$  أما النموذج المقدر الخطى فهو سالب الميل وربما يرجع ذلك إلى شدة تأثيرها هذه البيانات الأكثر تطرفاً، وعلى العموم فيمكن محاولة التغلب على مثل هذه المشكلة بالعديد من المقترحات والتي تفيد في التنبؤ بمدى تأثيره هذه البيانات أو المتغيرات المهمة أو حتى المساعدة.

شكل رقم (5-6) يوضح نقطة التأثير في البيانات





### بواقى ستيودنتيزد Studentized residuals

ففى الواقع يمكن استخدام قيمة الباقى، عند فحص نموذج معين إذ أنه يكون مفيد لأكثر من سبب، أولها أنه يستطيع أن يخلصنا من المشاهدات المتطرفة والتي ربما تفيد فى صحة النموذج، وثانياً يمكن عن طريقة تقييم الفروض الخاصة بتوزيع الخطأ ... وعلى الرغم من ذلك فإنه يمكن أن يكون استخدام الباقى كأداة تشخيصية تكون محدودة، وذلك قد يرجع إلى أن تأثير البيانات يمكن أن يتوافق مع الباقى، ويكونان معاً من علاقات الارتباط ولهذا السبب يكون من المفيد غالباً افتراض تعلق قيمة الباقى بكل مشاهدة على حدة عندما يتم تقدير نموذج الانحدار..

ومن هنا فإنه يمكن افتراض أن  $\beta(i)$  تمثل الانحدار المقدر عندما كانت (i) هى رقم المشاهددة والباقى سوف يكون  $e_i$  وهو يساوى

$$e_i = y_i - \beta_i x_i$$

ويلاحظ ان توقع هذه البواقى سوف يتبع التوزيع الطبيعى كذلك فإن المتوسط الخاص بها يساوى الصفر وبالطبع فإن التباين يكون ثابت هنا..

هذا، ومن الممكن القيام بقسمة قيمة الباقى على الانحراف المعيارى فنحصل على البواقى المعيارية، فإذا قمنا بقسمة الباقى  $e_i$  على الخطأ المعيارى المقدار للانحراف  $S(i)$  وذلك لكل مشاهدة ماملة ... فنحصل على

$$e_i^* = \frac{y_i - \beta(i)x(i)}{S(i)} \quad (6-16)$$

DFBETAS.....

## \_\_\_\_\_ الفصل الخامس \_\_\_\_\_ مشاكل النماذج القياسية (الكشف، الآثار، العلاج)

وهو مقياس يقوم بتقدير الاختلاف بين تقديرات المربعات الصغرى لمعلمة معينة، والمعلمة المقدرة فعلاً، مع مراعاة وجود مشاهدات مهملة، ولذا فإنه يهتم بقيمة معلمة معينة في النموذج، وهذا يتطلب تحديد أى من المشاهدات لديها تأثير غير معتادة على القيمة المقدرة للمعلمة..

ويلاحظ كذلك انه مقياس محدد بالانحراف المعياري المحدد بالقيمة  $\beta I$  وبالنسبة لمتغيرين يلاحظ أن:-

$$Df\beta ETAS = \frac{(\beta - \beta(i))}{Si\beta(i)}$$

وكقاعدة عامة غالباً ما تكون قيمة هذا المقدار أكبر من 1.96 من الناحية المطلقة حيث يتم ملاحظة تأثير كل قيمة مشاهدة على هذه النتيجة القيمية.

وعندما لا يوجد لدينا بيانات ناقصة عن الخطأ فإن القيمة المقدرة للمعلمة تكون أكثر دقة وبشكل عام يلاحظ أنه في حالة وجود أحد المشاهدات المتطرفة يمكن التغلب عليه بزيادة حجم العينة طالما أننا لا نريد إسقاط هذه المشاهدة، وبالطبع فإن زيادة العينة سوف يجعل تأثير هذه القيمة المتطرفة على النموذج تأثير ضعيف.

### مختبرات التوصيف "التعيين" Specification Tests

رأينا حالاً مدى أهمية ملاحظة خطأ التوصيف في الإقتصاد القياسي حيث أن سقوط أحد المتغيرات من النموذج سوف يؤدي إلى تحيز وعدم اتساق المربعات الصغرى .. فمن الأهمية أن نحاول إجراء نوع من البحث ل تحديد

\_\_\_\_\_ الفصل الخامس \_\_\_\_\_ مشاكل النماذج القياسية (الكشف، الآثار، العلاج)

ما إذا كان اختيار نموذج معين يتضمن أخطاء معينة أم لا، وسوف يتم مناقشة العديد منه الاختبارات المستخدمة لتحديد الأخطاء.

والآن سوف نتعرض للاختبارات التي تتضمن المتغيرات المهمة هي تلك التي يتم تطبيقها على نموذج الانحدار الخطي، وبالتالي فإننا سوف نقوم بإجراء اختبار لقياس الخطأ، ويمكن لنا استخدامه عندما يكون الخطأ غير مرتبط بآخر أو بعدد من المتغيرات المستقلة أو عندما يسقط أحد فروض النموذج الأساسية.

### 5/5 - تنقية النموذج

يمكن تنقية نموذج الانحدار من خلال إهمال بعض المتغيرات التي قد يكون لها تأثير غير مرغوب مع تقدير المعلمات في النموذج، رغم عدم أهميتها في التفسير، كذلك سوف نقدم في هذا الجزء، اختبار مدى إمكانية إهمال بعض المتغيرات في نموذج الانحدار الخطي: افترض وجود النموذج التالي:

$$Y_i = \beta_1 x_{1i} + \beta_2 x_{2i} + \beta_3 x_{3i} + \mu_i$$

وإن المتغير  $x_1$  غير مرتبط بالمتغيرين الآخرين  $x_2$ ،  $x_3$  فإنه يمكن استخدام اختبار (F) لمعرفة ما إذا كان هذا الأمر صحيحاً أم لا، فاختبار (F) يقدم لنا فرض العدم الذي يعنى أن  $\beta_2 = \beta_3 = 0$  في مقابل الفرض البديل الذي يعنى أن كل منها غير مساوى للصفر أو أنهما غير متساويان.

ويلاحظ أن هناك اختبار آخر يمكن استخدامه هنا وهو اختبار (t) الذي يستخدم بالنسبة لمعلمة معينة فيمكن استخدامه بعد تقدير معادلة الانحدار.

وبشكل عام يمكن القول أن استخدام اختبار (F) سوف يكون مرتبطاً إلى حد كبير بحجم العينة كى نضمن عدم تغير طبيعة الخطأ العشوائى.

### اختبار وجود أو غياب خطأ القياس

افترض وجود نموذج إنحدار بسيط كالآتى:

$$Y_i = \beta x_i + \mu_i$$

وأننا نريد قياس قيمة  $x_i$  مع وجود خطأ فى هذه القيمة فلو كانت  $x_i = X_i^* - V_i$  فإن علاقة إنحدار المربعات الصغرى سوف تكون  $y_i = \beta x_i^* + \mu_i$  حيث أن  $\mu_i = \beta V_i - \mu_i$  فلو تم قياس مع وجود خطأ بها فإنه يمكن إيجاد معادلة الإنحدار الحقيقية أى تقديرها بالطريقة التى نسمع بوجود هذا الخطأ، وبعبارة أخرى يمكن القول أننا نستطيع تقدير المعلمة  $\beta$  وذلك عن طريق افتراض المتغير  $z$  المرتبط بالمتغير  $X$  مع عدم إرتباطه بالمتغير  $v, \mu$  ونكون العلاقة بين  $X, Z$  معطاة كالآتى:

$$X_i^* = YZ_i + w_i$$

وعندما يتم استخدام المربعات الصغرى فإن هذه العلاقة كالاتى

$$\hat{x}_i = yz_i + \hat{w}_i$$

$$\hat{x}_i = \hat{x}_i + \hat{w}_i$$

حيث أن  $\hat{w}_i$  تشير إلى باقى الإنحدار فمن المعادلة

$$y_i = \beta \hat{x}_i + \mu_i$$

والمعادلة

$$\hat{x}_i = \hat{x}_i + \hat{w}_i$$

يُنتج

$$Y_i = \beta \hat{x}_i + \beta \dot{x}_i + \dot{\mu}_i$$

وهنا نلاحظ أن معامل  $\hat{x}_i$  يكون ثابت حيث يتم تقديره بأسلوب المربعات الصغرى، وبالتالي فإن وجود قياس الخطأ هنا أو إنعدامه لا يؤثر على النموذج طالما أن:

$$Plim[\sum \hat{w}_i \dot{\mu}_i / n] = Plim(\hat{Y} \sum Z_i (\mu_i + V_i) / N) = 0$$

وفي الواقع يلاحظ أن تقديرات المربعات الصغرى لمعامل  $x_i^*$  في المعادلة السابقة  $[Y_i = \beta \hat{x}_i + \beta w_i + \dot{\mu}_i]$  يكون مطابقاً لتقديرات المتغيرات المساعدة المعطاة في المعادلة  $\hat{\beta} = \sum Y_i Z_i / \sum X_i Z_i^*$  وبالنظر إلى معامل المتغير يمكن ملاحظة الآتي:-

$$\begin{aligned} &= Plim[\sum \hat{w}_i \dot{\mu}_i / n] \\ &= Plim[\sum \hat{x}_i - yz_i)(\mu_i - \beta V_i) / N] \\ &= Plim[-(\beta \sum X^* i V_i / N)] \\ &= Plim[-\beta \sum V_i (x_i + V_i) / N] = -\beta \sigma_v^2 \end{aligned}$$

وعندما لا يوجد أي خطأ في القياس فإن  $\sigma_v^2 = 0$ ، ومن ثم فإن المربعات سوف تكون متسقة التقديرات في هذه الحالة خاصة بالنسبة للمعامل  $\hat{w}_i$  لأنه إذا كان خطأ القياس موجوداً فإن المعامل  $\hat{w}_i$  لن يكون متسق التقدير.

وبالإضافة لذلك فإنه يمكن التوصل إلى مقياس اختيار أكثر سهولة لتعيين أو اختبار خطأ القياس دعنا نفترض الرمز  $S$  ، وهو يعبر عن معامل المتغير  $\hat{w}_i$  في المعادلة

$$Y_i = \beta x_i = \hat{x}_i \pm \hat{w}_i + \mu^* i$$

وبإحلال

$$\hat{x}_i = \hat{x}_i \pm \hat{w}_i$$

نحصل على

$$y_i = \beta \hat{x}_i + (S - \beta) \hat{w}_i + \mu_i$$

ومنها نلاحظ أنه مع عدم وجود خطأ القياس فإن  $S = \beta$  وبالطبع  $\hat{w}_i$  يساوى الصفر، وعلى أى حال عندما لا تتساوى  $S$  مع  $\beta$  أى  $S \neq \beta$  فإنه يمكن اختبار خطأ القياس ويتم ذلك على خطوتين:-  
الأولى: يوجد إحدار  $X^*$  على  $Z$  لإيجاد الباقي  $\hat{w}_i$  ثم يلى ذلك فى الخطوة الثانية: إيجاد إحدار  $y$  على  $\hat{x}$  ،  $\hat{w}$  ، ثم نقوم باستخدام الاختبار (t) معامل المتغير  $(\hat{w})$ .

ونقوم باستخدام اختبار (F) فى الحالة التى يوجد لدينا أكثر من متغير فى النموذج، ويمكن تناول المثال الآتى لتوضيح ما سبق.

### مثال تطبيقي: اختبار قياس الخطأ في نموذج الإنفاق العام

.. إن الإنفاق في الدولة يتحدد من خلال قناتين أساسيتين وهما، الإنفاق من جانب الدولة والإنفاق من جانب الولايات أى الحكومات المحلية ويمكن أن نرمزُ إليه بالرمز (Exp). ولكن ما هي العوامل المحددة والمؤثرة على قيمة هذا الإنفاق أو الاختلاف في مستوياته... هنا نفترض ما يعرف بالمساعدات الفيدرالية AID، دخل الولايات INC، عدد السكان للولايات pop كعوامل محددة لهذا الإنفاق ... ونقوم ببناء نموذج يجمع هذه المتغيرات معا كمتغيرات مستقلة. نفرز تأثيرها على المتغير التابع وهو الإنفاق العام ويتم استخدام طريقة المربعات الصغرى، في وجود بيانات عن 50 ولاية أمريكية ولقد كانت النتيجة لبناء هذا النموذج هي كما يلي مع مراعاة أننا ذكرنا قيمة إختبارات (t) بين قوسين أسفل المتغيرات مباشرة في النموذج.

$$EXP = - 46.81 + 3.24 AID + 0.00019INC - 0.59POP$$

$$\begin{matrix} (-0.56) & (13.64) & (8.12) & (-5.71) \end{matrix}$$

$$R^2 = 0.993 \quad F = 2.190$$

ويلاحظ أنه طالما كان برنامج المساعدات AID يتضمن دفع مبالغ نقدية ثابتة فإن هذا قد يكون مصدراً هاماً للخطأ في المتغير Aid فالنقود تستطيع أن تحدد لنا القيمة المطلوبة لهذا البرنامج حتى قبل وضع الميزانيات على مستوى الدولة أو المحليات.

فإذا كانت هذه البرامج وأمثالها هي برامج مفتوحة الأهداف، أي قد تكون مبالغة في أهدافها Open-ended فإن ذلك يجعل القيم النقدية لها غير واقعية وتختلف مع القيمة الحقيقية أو المبالغ المحققة التي يمكن تقديمها من جانب الدولة أو المحليات، ونتيجة لذلك فإن المتغيرة AID يمكن أن يكون تابعا لخطأ القياس الفعلي.

\_\_\_\_\_ الفصل الخامس \_\_\_\_\_ مشاكل النماذج القياسية (الكشف، الآثار، العلاج)

وفى الحقيقة فإنه يمكن اختبار وجود خطأ القياس هذا ... باستخدام اختبار يعرف بإسم إختبار هوسمان Housman Test ولكى نقوم بذلك نستخدم البيانات الخاصة بطلبة المدارس الابتدائية والثانوية كمتغيرات للدالة على عدد السكان Pop ونرمز لها بالرمز Ps حيث أن الإنفاق المدرسى هو أكبر جزء أساسى فى الإنفاق الحكومى والمحلى.

وعملية الإختبار تتم على مرحلتين ... فى المرحلة الأولى نجد أن AID يرجع التأثير فيها إلى قيمة Ps وكذلك المتغير الباقي  $w^{\wedge}$  الذى يكون محسوب القيمة.

**وفى الخطوة الثانية** نضيف  $wi^{\wedge}$  إلى نموذج الإنحدار الأصلى لتصحيح قيمة خطأ القياس، والمعادلة الناتجة تكون

$$EXP^{\wedge} = -138.51 + 1.74AID + 0.0018INC - 0.275POP + 1.372wi^{\wedge}$$

(-1.41)      (1.94)      (7.55)      (-1.29)      (1.73)

وهنا يمكن القول أنه يتم رفض فرض العدم الذى مقتضاه عدم وجود خطأ القياس. فى إختبار (T) ذو الطرفين وذلك عند مستوى معنوية 5% طالما أن  $1.73 < 1.96$  وبشكل عام يعتبر خطأ القياس شديد الأهمية أيضا لو كنا نستخدم إختبار ذو طرف واحد عند مستوى معنوية  $> 10\%$

وملاحظة أخيرة يمكن قولها فى هذا الموضوع وهى... أنه فى حالة تصحيح خطأ القياس لآى نموذج فإنه سوف يودى إلى التقليل من قيمة المعامل الخاص بالمتغيرات الذى كان به الخطأ ... وفى حالتنا هنا سوف تنخفض قيمة معامل المتغير Aid.

حيث أن خطأ القياس هو السبب الرئيسى فى التأثير على قيمة AID فى الإنفاق العام عندما يجعلها تظهر بقيمة مبالغ فيها Over stated.  
تم بحمد الله،





## قائمة المراجع

### أولاً- المراجع العربية:

- ١- د. إسماعيل سليمان العوامري " الإحصاء الاقتصادي و التجاري " مكتبة التجارة و التعاون ؛ القاهرة .
- ٢- د. جلال مصطفى الصياد "الاستدلال الإحصائي " دار المريخ ؛ السعودية ؛ الرياض .
- ٣- د. عادل عبد الغنى محبوب " الاقتصاد القياسي " وزارة التعليم العالي ؛ العراق .
- ٤- د. عبد الرحمن حامد ، د. بوعلام بن حيلالي " التحليل الإحصائي للمتغيرات المتعددة من الوجهة التطبيقية " دار المريخ ؛ السعودية ؛ الرياض .
- ٥- د. عمر عبد الجود عبد العزيز ، د. عبد الحفيظ بلعربي " مقدمة في الطرق الإحصائية مع تطبيقات تجارية " دار زهران للنشر والتوزيع ؛ الأردن .
- ٦- د. محمد عبد السميع " نظرية الاقتصاد القياسي " كلية التجارة - جامعة الزقازيق . الزقازيق .
- ٧- د. هناء خير الدين " الاقتصاد القياسي " دار الشعب ؛ القاهرة .

## ثانياً- المراجع الأجنبية :

J. Johnston " Econometric Methods " New York . McGraw-Hill book Company 1980

As goldbreger " Econometric Theroy " New York John Wiley and Sons 1964

H theil " Principles of Econometrics " Amsterdam North Holland publishing Company 1979

M D Intriligator " Econometrics Techniques and Application " Amsterdam North Holland publusing Company 1978

J L Munphy Inttrodutory " Econometrics " Richard D Irwin Inc howe Wood 1973

A A V 'alters " An Introduction to Econometrics " london Macnill an 1970

D Gajarali " Basic Econometrics " Tokyo Megraw Hill Book Company 1978

R Carter Hill William E Griffiths and Geory G .Judge " Undergradute Econometrics " JohnWiley&Song,Inc.New York.